Capítulo 4

Modelos de elección intertemporal

4.1 Introducción

Los hogares pueden destinar su renta disponible a consumo presente o a ahorro. El ahorro positivo es un procedimiento por el cual los hogares pueden reasignar sus recursos intertemporalmente y transferir renta presente hacia el futuro. Una situación de ahorro negativo, desde el punto de vista de un hogar individual, es una forma mediante la cual los hogares pueden transferir renta futura hacia el presente. Esta es una de las principales razones por las cuales los hogares deciden ahorrar y no gastar en bienes de consumo toda su renta presente. Además, existen otro tipo de motivos por los cuales los hogares deciden ahorrar. Entre ellos destaca el incentivo que algunos hogares pueden tener a dejar una cierta cuantía de la riqueza a las generaciones futuras (herencias). En un entorno de incertidumbre sobre los ingresos futuros se puede ahorrar como una forma de asegurarse ingresos futuros en caso de una caída inesperada de los ingresos (motivo precaución). También podría ser el caso que los hogares ahorran porque en un entorno de restricciones de crédito la financiación externa de actividades productivas puede estar restringida y la creación de una empresa puede requerir la aportación por parte del hogar de una parte de su riqueza a dicha empresa. En definitiva, son muchas las razones por las cuales los hogares pueden decidir ahorrar (o tomar prestado, ahorro negativo).

El propósito de este capítulo es introducir el modelo básico de elección intertemporal desde la perspectiva del comportamiento racional del individuo. Es decir, nos centraremos en las decisiones de ahorro desde una perspectiva de reasignación temporal de los ingresos en un entorno de certidumbre. Más adelante analizaremos decisiones de ahorro en entornos de incertidumbre. El capítulo utiliza un marco de equilibrio parcial donde los precios relativos y la renta de cada periodo están dados, ello permite formular las decisiones de los individuos como función de los precios, permitiendo analizar como varían las decisiones de los individuos ante cambios en los mismos.

4.2 Formulación secuencial del problema

En este capítulo introducimos un modelo sencillo de dos periodos para analizar la asignación intertemporal de recursos. Para ello es necesario definir los elementos básicos del mismo, que están formados por las preferencias de los individuos y la restricción de recursos a la que se enfrentan en cada periodo.

4.2.1 Preferencias

Supondremos que las preferencias de los individuos pueden representarse mediante una función de utilidad del tipo:

$$U(c_t, c_{t+1}) = u(c_t) + \beta u(c_{t+1}). \tag{4.1}$$

Esta función de utilidad cumple los siguientes supuestos:

1. Aditivamente separable en el tiempo. Esto implica que la utilidad de hoy no afecta a la utilidad de mañana aunque si que afecta a la utilidad total del individuo.

2. Es una función continua, diferenciable, creciente y estrictamente cóncava en la utilidad de cada periodo ($u' > 0$ y $u'' < 0$). El signo positivo de la primera derivada implica que incrementos en la cantidad consumida aumentan la utilidad del individuo. El signo negativo de la segunda derivada implica que dichos incrementos de utilidad son decrecientes, de forma que cada unidad adicional de consumo reporta cada vez menos utilidad.

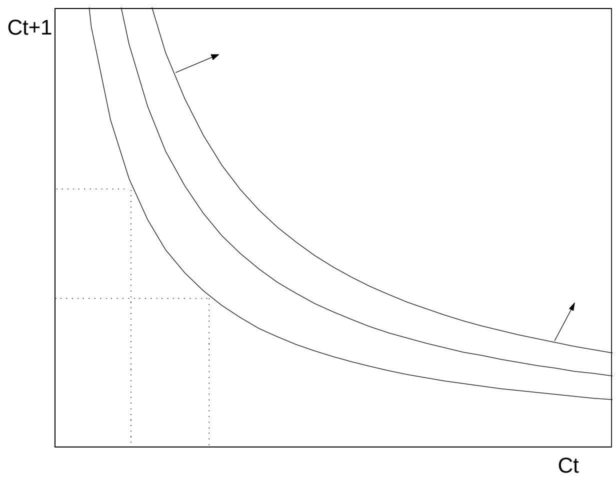
3. La utilidad futura está descontada por un **factor de descuento**, $\beta \in (0, 1)$. Significa que los individuos valoran más el consumo presente que el consumo futuro, es decir son impacientes. Un factor de descuento cercano a cero implica que el individuo es muy impaciente, valorando muy poco el consumo futuro; en cambio, un factor de descuento cercano a la unidad implica que el individuo es muy paciente, valorando el consumo futuro igual que el consumo presente. Nótese que la tasa a la cuál el individuo descuenta el futuro viene dada por $R = 1/\beta - 1$, que

es la tasa subjetiva de descuento. De esta forma podríamos describir la función de utilidad de la siguiente forma:

$$U(c_t, c_{t+1}) = u(c_t) + \frac{1}{1+R} u(c_{t+1}).$$

Podemos representar gráficamente las preferencias sobre el consumo presente y el consumo futuro mediante la utilización de un mapa de curvas de indiferencia, como el que representa la Figura 1:

Figura 1: Conjunto elección consumo presente y futuro



La pendiente de las curvas de indiferencia en cada punto se define como la Relación Marginal de Sustitución (RMS) entre consumo presente y consumo futuro, y viene dada por la utilidad marginal del consumo presente dividida por la utilidad marginal futura descontada:

$$RMS_{t,t+1} = \frac{\partial U(c_t, c_{t+1})/\partial c_t}{\partial U(c_t, c_{t+1})/\partial c_{t+1}} = \frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})}$$

4.2.2 Restricción de Recursos

A continuación se analizan las restricciones a las que se enfrentan los individuos en la elección intertemporal de recursos. Los individuos en cada momento del tiempo disponen de una determinada cantidad de recursos que pueden dedicar a consumir o a ahorrar. La cantidad ahorrada por los individuos en el primer periodo formará parte de la renta de los individuos en el siguiente periodo, pero capitalizada a la tasa de interés de mercado, que no tiene por qué coincidir con la tasa subjetiva de descuento. Los individuos tienen un comportamiento precio-aceptante con respecto a los precios, de forma que los toman como dados. Las restricciones presupuestarias de este hogar en el momento t y en el momento siguiente $t+1$ vienen dadas por:

$$c_t + a_{t+1} \leq w_t, \tag{4.2}$$

$$c_{t+1} \leq (1 + r_{t+1})a_{t+1} + w_{t+1}, \tag{4.3}$$

siendo c_t, c_{t+1} el consumo en el periodo t y $t+1$, respectivamente; w_t y w_{t+1} la dotación de bienes de que los individuos disponen en cada momento del tiempo. Por tanto a_{t+1} constituye la posición neta de activos que el hogar decide en el periodo t y son activos financieros que el individuo acumula para el periodo siguiente y que obtienen un rendimiento r_{t+1}, que es la rentabilidad de ese ahorro/inversión. Nótese que no imponemos ninguna restricción en el signo del ahorro, de forma que los individuos pueden endeudarse (en el caso en que $a_{t+1} < 0$), interpretándose entonces r_{t+1}, como el coste financiero del préstamo del primer periodo, que debe devolverse en el periodo siguiente. A estas dos restricciones se las conoce como **restricciones secuenciales**, pues son las que se enfrenta el individuo en cada momento del tiempo. Es posible sustituir una restricción en la otra a través del ahorro, despejando a_{t+1} de la ecuación (4.3) y sustituyendo este valor en la ecuación (4.2), obteniendo la **restricción intertemporal** de recursos:

$$c_t + \frac{c_{t+1}}{1 + r_{t+1}} \leq w_t + \frac{w_{t+1}}{1 + r_{t+1}}. \tag{4.4}$$

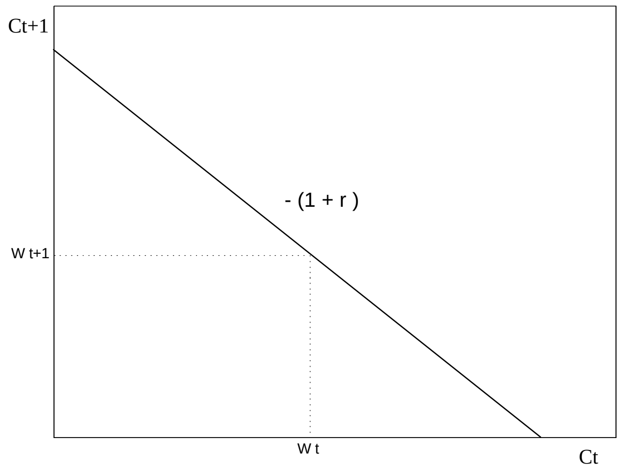
Esta restricción nos dice que el valor presente del consumo a lo largo de los dos periodos debe ser igual al valor presente de la dotación del individuo a lo largo de los dos periodos. Obsérvese que el ahorro constituye la forma en la cual un individuo puede transformar consumo presente en consumo futuro y viceversa. El factor $1/1 + r_{t+1}$ mide el coste de oportunidad de una unidad adicional de consumo mañana a precios de hoy (el precio del consumo futuro en términos de consumo presente), que depende de los tipos de interés de mercado, r_{t+1}. En valor futuro podríamos reescribir la ecuación de la siguiente forma:

$$(1 + r_{t+1})c_t + c_{t+1} \leq (1 + r_{t+1})w_t + w_{t+1}. \tag{4.5}$$

Observe que el tipo de interés de mercado r_t refleja mi capacidad para intercambiar unidades de consumo de hoy por unidades de consumo mañana. Por tanto, se trata de los tipos de interés real (no nominales), en tanto en cuanto lo que valoran los individuos en su función objetivo es su nivel de consumo en términos reales, es decir, su capacidad adquisitiva. Por la misma razón las dotaciones temporales de recursos están medidas en términos reales.[1]

Gráficamente podemos dibujar el conjunto de elección de la siguiente forma,

Figura 2: Conjunto elección intertemporal



Suponemos que el consumo del individuo en cada momento del tiempo es estrictamente no negativo, es decir, $c_t, c_{t+1} \geq 0$. La pendiente de la restricción presupuestaria es $-(1 + r_{t+1})$. La motivación de los individuos para ahorrar o pedir prestado es sincronizar el flujo de ingresos con el flujo de consumo deseado. Si el patrón intertemporal de la dotación de recursos coincidiera con el patrón deseado de consumo de los individuos, entonces éstos no tendrían ningún incentivo a ahorrar ni a pedir prestado.

Nota: El supuesto implícito en este análisis es la existencia de un mercado perfecto de capitales. Si los mercados de capitales no son perfectos existen restricciones en el intercambio intertemporal, éstas pueden venir dadas por restricciones de liquidez. Estos temas serán tratados más adelante.

[1] Recuerde que a partir de unos tipos de interés nominales R_t y una tasa de inflación π_t, obtenemos que el tipo de interés real (el incremento de la capacidad adquisitiva) r_t se calcula por la siguiente expresión $1 + r_t = (1 + R_t)/(1 + \pi_t)$. La solución $r_t \simeq R_t - \pi_t$ es aproximadamente válida cuando R_t y π_t son pequeños. Por lo tanto, este análisis es válido para situaciones en que se quieran considerar explícitamente consideraciones nominales. La restricción presupuestaria es entonces:

$$c_t + \frac{1 + \pi_t}{1 + R_{t+1}} c_{t+1} = w_t + \frac{1 + \pi_t}{1 + R_{t+1}} w_{t+1}.$$

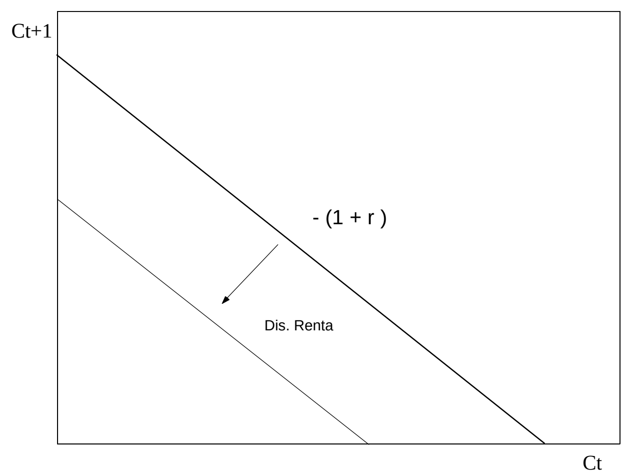
4.2.3 Estática Comparada

Cambios en el nivel de ingresos en cada uno de los periodos o en los tipos de interés modifican el conjunto de elección de los individuos.

1) **Variaciones de Renta.**

Los aumentos en la dotación de bienes, con independencia del periodo en que tengan lugar, desplazan el conjunto de elección paralelamente al original sin modificar la pendiente, pues los tipos de interés en la economía no han cambiado. De forma que variaciones en la renta incrementan o disminuyen la capacidad de consumo/ahorro con independencia del periodo en el cual se produzcan dado que no existen restricciones a la hora de transferir recursos intertemporalmente:

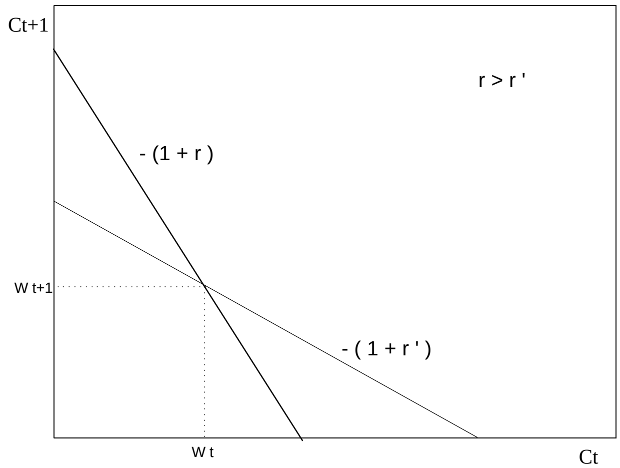
Figura 3: Variaciones de renta



2) **Variaciones en los Tipos de Interés Reales.**

La variaciones en el tipo de interés afectan a las decisiones de prestar o pedir prestado en el mercado financiero. Un incremento de precios de los préstamos aumenta la rentabilidad del ahorro y disminuye la capacidad de endeudamiento de los individuos, mientras que una disminución de la rentabilidad incrementa la capacidad para endeudarse y disminuye la rentabilidad futura de este ahorro.

Figura 4: Variaciones tipo de interés

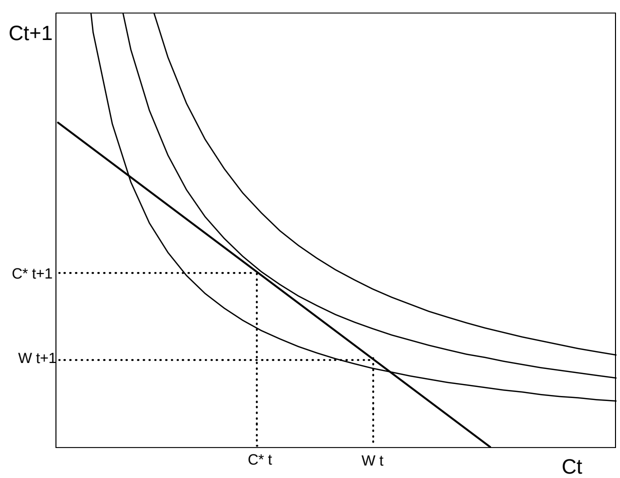


4.2.4 Elección Óptima

Solución gráfica

Si suponemos una solución interior, la solución del problema de elección se encuentra en el punto de tangencia entre la restricción intertemporal de recursos y las curvas de indiferencia que representan las preferencias del individuo.

Figura 5: Elección intertemporal óptima



En un óptimo interior se cumple , $RMS = (1 + r_{t+1})$, es decir, la elección óptima implica en primer lugar igualar la relación marginal de sustitución entre el consumo presente y el consumo futuro al tipo de interés de mercado. Pero esta condición es sólo necesaria pues existen infinitos puntos donde esta relación es cierta, por lo tanto la solución del problema debe pertenecer a la frontera del conjunto presupuestario, es decir que la restricción presupuestaria debe cumplirse con igualdad. Eso simpre será cierto si las preferencias son mónotonas y no existen soluciones de esquina en el problema de elección. De todas formas desde el punto de vista de la teoría del ahorro no nos preocuparemos mucho de las soluciones de esquina ni de las preferencias que exhiben saciedad local.

En este caso dadas las preferencias del individuo y la dotación inicial de recursos observamos que la elección óptima implica ahorrar recursos en el momento t, y así poder consumir más en el segundo periodo. Al tipo de interés vigente el individuo tiene una renta relativa superior en el primer periodo en relación con el segundo periodo. A pesar de ello es importante tener en cuenta que la elección óptima es una combinación de las preferencias de los individuos y los precios de mercado, que delimintan lo económicamente factible de lo no factible.

Solución formal

El problema formal consiste en solucionar el siguiente problema de optimización con restricciones.

$$\max_{\{c_t, c_{t+1}, a_{t+1}\}} \quad u(c_t) + \beta u(c_{t+1}),$$

$$s.a. \qquad c_t + a_{t+1} \leq w_t,$$

$$c_{t+1} \leq (1 + r_{t+1}) a_{t+1} + w_{t+1},$$

$$c_t, c_{t+1} \geq 0.$$

En este caso la función objetivo es estrictamente cóncava y el conjunto de elección es un conjunto compacto (cerrado y acotado) y convexo. Por lo tanto según el **Teorema de Weierstrass**, este problema tiene solución. La estricta convexidad de las curvas de indiferencia (es decir, funciones de utilidad cuasi-cóncavas, que es un concepto más general que la concavidad) garantiza que la solución sea única.

Para poder solucionar formalmente el problema y obtener las funciones de consumo y ahorro vamos a plantear distintas estrategias que como veremos son equivalentes.

1) OPTIMIZACIÓN UNIDIMENSIONAL

La forma más sencilla de solucionar el problema es sustituir las restricciones dentro de la función objetivo, esto sólo lo podremos hacer cuando las soluciones sean interiores. Por ahora supondremos que la solución es interior. Al sustituir las restricciones en la función objetivo el nuevo problema de optimización es el siguiente:

$$\max_{\{a_{t+1}\}} u(w_t - a_{t+1}) + \beta u(w_{t+1} + (1 + r_{t+1})a_{t+1}).$$

Como puede observarse el consumo de cada periodo no aparece de forma explícita, por lo tanto la única variable de elección es el ahorro o el nivel de activos. Por lo tanto se ha reducido un problema de optimización multidimensional a un sencillo problema unidimensional. Para encontrar el óptimo basta con derivar respecto el nivel de activos, a_{t+1} e igualar a cero:

$$u'(w_t - a_{t+1})(-1) + \beta u'(w_{t+1} + (1 + r_{t+1})a_{t+1})(1 + r_{t+1}) = 0.$$

Arreglando términos obtenemos:

$$u'(w_t - a_{t+1}) = \beta u'(w_{t+1} + (1 + r_{t+1})a_{t+1})(1 + r_{t+1}).$$

La siguiente expresión depende del nivel de activos y puede interpretarse de la siguiente forma. Si el nivel de activos es positivo $a_{t+1} > 0$ entonces el individuo iguala el coste marginal de ahorrar una unidad adicional (la utilidad marginal de una unidad de consumo presente a que se renuncia) al beneficio marginal de obtener una unidad adicional mañana (cuántas unidades más obtengo mañana por cada unidad que ahorro, $1 + r_t$, por la utilidad marginal descontada de cada una de éstas). Si $a_{t+1} < 0$ entonces el individuo iguala el beneficio marginal de consumir una unidad adicional en el presente, endeudándose, al coste marginal futuro descontado por el tipo de interés real de mercado. Si $a_{t+1} = 0$ entonces el individuo no desea transferir riqueza en el tiempo por lo tanto, la estrategia óptima es consumir en cada momento t, la dotación de recursos del periodo.

Para ver si la condición necesaria de primer orden es suficiente para caracterizar un máximo debemos comprobar el signo de la segunda derivada de la función objetivo:

$$u''(w_t - a_{t+1}) + \beta u''(w_{t+1} + (1 + r_{t+1})a_{t+1})(1 + r_{t+1})^2 < 0.$$

Las segundas derivadas de la función de utilidad son negativas, $u'' < 0$, ya que hemos supuesto que la utilidad marginal es decreciente. Si el tipo de interés es positivo $(1 + r_{t+1})^2 > 0$ entonces la expresión resultante será siempre negativa. De esta forma las condiciones necesarias son suficientes para caracterizar una solución del problema.

2) MÉTODO DE LAGRANGE

Otra opción es transformar el problema original en uno nuevo utilizando el método de Lagrange. El nuevo problema de elección es:

$$\max_{\{c_t, c_{t+1}, a_{t+1}, \lambda_t, \lambda_{t+1}\}} \pounds = u(c_t)+\beta u(c_{t+1})+\lambda_t(w_t-c_t-a_{t+1})+\lambda_{t+1}(w_{t+1}+(1+r_{t+1})a_{t+1}),$$

$$\begin{aligned} s.a. \qquad c_t, c_{t+1} &\geq 0 \\ \lambda_t, \lambda_{t+1} &\geq 0 \end{aligned}$$

donde λ_t y λ_{t+1} son los multiplicadores de Lagrange asociados a cada restricción, que son números no negativos. Las condiciones necesarias de primer orden son:

$$\begin{array}{lr} [c_t] & u'(c_t) - \lambda_t \leq 0 \qquad (= 0 \quad si \quad c_t > 0) \\ [c_{t+1}] & \beta u'(c_{t+1}) - \lambda_{t+1} \leq 0 \qquad (= 0 \quad si \quad c_{t+1} > 0) \\ [a_{t+1}] & -\lambda_t + \lambda_{t+1}(1 + r_{t+1}) = 0 \\ [\lambda_t] & w_t - c_t - a_{t+1} \geq 0 \qquad (= 0 \quad si \quad \lambda_t > 0) \\ [\lambda_{t+1}] & (1 + r_{t+1})a_{t+1} + w_{t+1} - c_{t+1} \geq 0 \qquad (= 0 \quad si \quad \lambda_{t+1} > 0) \end{array}$$

En una solución interior las condiciones de primer orden se cumplen con igualdad ($c_t, c_{t+1} > 0$). El hecho de que la utilidad marginal tienda a infinito cuando el consumo tiende a cero garantiza que estaremos siempre en una solución interior respecto a los consumos, las condiciones $[c_t]$ y $[c_{t+1}]$ se cumplen con igualdad. Luego, como la utilidad marginal es siempre estrictamente positiva, los multiplicadores de Lagrange también son estrictamente positivos, lo que garantiza que las condiciones $[\lambda_t]$ y $[\lambda_{t+1}]$ también se satisfagan con igualdad, de forma que los individuos gastan toda su renta.

Combinando las dos primeras ecuaciones obtenemos:

$$\frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} = \frac{\lambda_t}{\lambda_{t+1}}.$$

Esta ecuación iguala la relación marginal de sustitución (entre el consumo presente, c_t y el consumo futuro, c_{t+1}) al ratio de precios sombra que están representados por los multiplicadores de Lagrange. Esta expresión muestra la valoración subjetiva de consumo en cada periodo realizada por el individuo.

La relación entre los precios sombra de cada periodo se refleja en la siguiente expresión que se obtiene derivando respecto el nivel de activos:

$$\lambda_t = \lambda_{t+1}(1 + r_{t+1}).$$

Esta expresión mide el efecto de sacrificar una unidad de consumo presente, que en el futuro valdrá $(1 + r_{t+1})$, o alternativamente mide cuántas unidades de consumo de mañana serían necesarias para obtener una de hoy, es decir mide el coste de oportunidad del consumo de cada periodo a precios de mercado. Sustituyendo esta expresión en la anterior obtenemos la **Ecuación de Euler:**

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(1 + r_{t+1}).$$

La Ecuación de Euler iguala la utilidad marginal de una unidad consumida hoy a la utilidad marginal de una unidad ahorrada. Una unidad ahorrada hoy genera $1 + r_{t+1}$ unidades de consumo mañana, y éstas generan una utilidad marginal al individuo de $\beta u'(c_{t+1})$. Esta ecuación es la ecuación que determina las decisiones de consumo/ahorro de los individuos. Si la parte izquierda de la expresión fuera superior lo óptimo sería consumir más hoy disminuyendo el ahorro. Al revés, si la utilidad marginal hoy fuera inferior, lo óptimo sería incrementar el ahorro. En equilibrio, deben igualarse.

Si el nivel óptimo de consumos fuese exactamente igual a la dotación de recursos, $c_t^* = w_t$ y $c_{t+1}^* = w_{t+1}$, entonces el nivel de ahorro sería cero.

La condición de primer orden (Ecuación de Euler) conjuntamente con la restricciones presupuestarias, forma un sistema matemático de ecuaciones e incógnitas, que permite obtener el consumo óptimo de cada periodo y el nivel de activos. Las funciones de consumo y de ahorro de cada periodo dependen exclusivamente de variables exógenas (renta en ambos periodos y tipo de interés real):

$$\begin{aligned} c_t^* &= c(w_t, w_{t+1}, r_{t+1}) \\ c_{t+1}^* &= c(w_t, w_{t+1}, r_{t+1}) \\ a_{t+1}^* &= a(w_t, w_{t+1}, r_{t+1}) \end{aligned}$$

Interpretación de la Ecuación de Euler

A partir de la ecuación de Euler, es posible determinar cual será el consumo relativo que se realizará entre cada periodo, en función de cual sea la relación entre el factor de descuento subjetivo del individuo y el tipo de interés de mercado:

$$\underbrace{u'(c_t)/\beta u'(c_{t+1})}_{\text{Relación Marginal de sustitución}} = \underbrace{(1 + r_{t+1})}_{\text{Precios relativos}}$$

Reescribiendo esta expresión obtenemos el consumo relativo que se realizará en cada periodo, como función de la relación entre el factor de descuento subjetivo del individuo y el tipo de interés de mercado:

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta(1 + r_{t+1})$$

- Si $\beta(1+r_{t+1}) = 1$, entonces $u'(c_t) = u'(c_{t+1})$ la utilidad marginal en cada periodo debe igualarse, por lo tanto el consumo en los dos periodos se iguala, es decir, $c_t = c_{t+1}$.

  Con independencia de la forma funcional es posible derivar el ahorro asociado a asignaciones simétricas de consumo, donde $c_t = c_{t+1}$. Sustituyendo las restricciones secuenciales en la ecuación de Euler:

  $$u'(w_t - a_{t+1}) = u'(w_{t+1} + (1+r_{t+1})a_{t+1})$$

  dado que la utilidad marginal de los dos periodos se iguala, entonces esto implica que:

  $$w_t - a_{t+1} = w_{t+1} + (1+r_{t+1})a_{t+1}$$

  aislando el ahorro obtenemos:

  $$a^*_{t+1} = \frac{(w_t - w_{t+1})}{2 + r_{t+1}}$$

  para obtener el consumo respectivo de cada periodo basta con sustituir el ahorro en la restricción presupuestaria:

  $$\begin{aligned} c^*_t &= w_t - \left(\frac{w_t - w_{t+1}}{2 + r_{t+1}}\right) \\ c^*_{t+1} &= w_{t+1} + (1+r_{t+1})\left(\frac{w_t - w_{t+1}}{2 + r_{t+1}}\right) \end{aligned}$$

- Si $\beta(1+r_{t+1}) > 1$, entonces $u'(c_t) > u'(c_{t+1})$ la utilidad marginal del consumo hoy es mayor que la utilidad marginal del consumo mañana, por lo tanto debido a la relación inversa entre consumo y utilidad marginal, el consumo en t es menor que el consumo en $t+1$, $c_t < c_{t+1}$. De esta forma cuando la tasa de descuento del individuo es menor que la del mercado entonces el consumo es creciente.

- Si $\beta(1+r_{t+1}) < 1$, entonces $u'(c_t) < u'(c_{t+1})$ la utilidad marginal del consumo en t es menor que en $t+1$, por lo tanto $c_t > c_{t+1}$. En este caso la tasa de descuento individual es menor que la del mercado, por lo tanto la respuesta óptima implica un patrón de consumo decreciente.

Ejemplo: Veamos un ejemplo particular, con una función de utilidad isoelástica:

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

donde $\sigma \in (0, \infty)$ denota la inversa de la elasticidad intertemporal de sustitución entre el consumo presente y el consumo futuro. La ecuación de Euler para esta forma funcional en concreto puede escribirse de la siguiente forma:

$$\left(\frac{c_t}{c_{t+1}}\right)^{-\sigma} = \beta(1 + r_{t+1})$$

arreglando términos obtenemos:

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = (\beta(1 + r_{t+1}))^{\frac{1}{\sigma}}$$

Si $\beta(1 + r_{t+1}) = 1$, entonces $c_t = c_{t+1}$ con independencia de cuál sea el valor de σ. Esto es debido a que coincide la valoración subjetiva de los individuos y el tipo de interés de mercado. Si $\beta(1 + r_{t+1}) \neq 1$, cuanto mayor es σ más cóncava es la función de utilidad y por lo tanto peor están los individuos ante variaciones en el consumo entre ambos periodos con independencia de la relación $\beta(1 + r_{t+1})$. En el límite, $\lim_{\sigma\to\infty} (\beta(1 + r_{t+1}))^{\frac{1}{\sigma}} = 1$. Esto significa que cuanto mayor sea σ, menor disposición de los individuos a sustituir consumo en un periodo por consumo en otros. Entonces, en el límite los individuos igualarán el consumo en todos los periodos.

4.3 Formulación Arrow-Debreu

Es importante resaltar como el tratamiento de este tipo de problema no difiere conceptualmente del problema de elección óptima del consumidor entre bienes distintos. La formulación Arrow-Debreu implica que dos bienes del mismo tipo consumidos en diferentes momentos del tiempo son considerados como bienes distintos con precios asociados diferentes. Para ello es necesario redefinir el concepto de precio utilizado, indicando los bienes no sólo por el tipo sino por el momento en que se consumen. De esta manera, podemos reescribir el modelo de elección intertemporal como un modelo de elección estático, donde todas las elecciones se realizan en el momento inicial $t = 0$. En esta nueva reinterpretación, al igual que que en el caso anterior, los individuos son precio-aceptantes respecto a los precios y al flujo intertemporal de ingresos (presente y futuro), y eligen una cesta de bienes de consumo $\{c_t, c_{t+1}\}$.

Para analizar la formulación Arrow-Debreu tan sólo debemos reescribir la restricción de recursos, pues las preferencias permanecen inalteradas. Partiendo de la restricción intertemporal de recursos:

$$c_t + \frac{1}{1+r_{t+1}} c_{t+1} \leq w_t + \frac{1}{1+r_{t+1}} w_{t+1}$$

Definimos p_t en la formulación Arrow-Debreu como el precio de una unidad de consumo en términos del periodo base, que suele ser el periodo inicial $t = 0$. A continuación definimos precios en el periodo $t+1$ como $p_{t+1} = p_t/(1+r_{t+1})$. Multiplicamos por p_t la restricción intertemporal de recursos y obtenemos:

$$p_t c_t + p_{t+1} c_{t+1} \leq p_t w_t + p_{t+1} w_{t+1}$$

Literalmente esta restricción dice que el valor actual neto (en precios del periodo 0) del gasto en consumo en t y $t+1$ no puede superar el valor actual neto de las rentas en t y $t+1$.

Observe que de la forma en que hemos definido los precios Arrow-Debreu se obtiene recursivamente el precio del periodo t simplemente como el valor actual neto de una unidad de consumo del periodo t en el periodo inicial 0. El precio del periodo base puede normalizarse a la unidad y el resto de precios convierten las asignaciones del periodo t a valor actual neto del periodo 0:

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 \\ p_t &= \frac{1}{(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_t)} \end{aligned}$$

Con los precios definidos de esta manera, este problema es equivalente al problema secuencial, con la diferencia de que existe una única restricción presupuestaria para cada individuo y no una para cada periodo.[2] El problema que solucionan los individuos del periodo t es el siguiente:

$$\max_{\{c_t, c_{t+1}\}} u(c_t) + \beta u(c_{t+1})$$

$$\begin{aligned} s.a. \qquad & p_t c_t + p_{t+1} c_{t+1} \leq p_t w_t + p_{t+1} w_{t+1} \\ & c_t, c_{t+1} \geq 0 \end{aligned}$$

Este problema no difiere en absoluto del problema estándar de un consumidor que debe elegir entre dos bienes distintos en un momento del tiempo. El individuo elige dos bienes, consumo hoy y consumo mañana $\{c_t, c_{t+1}\}$ medido en términos reales a precios del periodo 0, dada su renta (que es el valor monetario de la dotación que posee de ambos bienes) y los precios de ambos bienes $\{p_t, p_{t+1}\}$, donde los precios relativos entre ambos bienes son $p_t/p_{t+1} = 1/(1 + r_{t+1})$.

[2] Más adelante ampliaremos este argumento para individuos que eligen optimamente consumo/ahorro a lo largo de un número mayor de periodos. El argumento es el mismo y de momento por simplicidad trabajaremos sólo con dos periodos.

La ecuación de Euler asociada al problema en formulación Arrow-Debreu está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{u'(c_t)}{u'(c_{t+1})} = \beta \frac{p_t}{p_{t+1}}$$

Nótese que el ratio de precios Arrow-Debreu equivale al tipo de interés, $p_t/p_{t+1} = (1 + r_{t+1})$. De hecho, sustituyendo esta expresión obtendríamos la Ecuación de Euler que habíamos obtenido en el problema secuencial.

Es posible realizar un análisis análogo al anterior analizando la relación entre p_t/p_{t+1} y β. Si $(p_t/p_{t+1})\beta = 1$, entonces $c_t = c_{t+1}$. Para asignaciones simétricas es posible hallar los precios relativos facilmente, pues la ecuación de Euler se convierte en la siguiente expresión:

$$1 = \beta \frac{p_t}{p_{t+1}},$$

dado que $u'(c_t) = u'(c_{t+1})$. Entonces, $p_{t+1}/p_t = \beta$, de forma que el precio del bien de consumo valorado en $t + 1$ es menor que el precio del consumo en t. Esto es debido a que los individuos descuentan el futuro y prefieren una unidad de consumo presente que futura. Por tanto, para que los consumos fueran constantes los precios debieran caer a la tasa a la cual se descuenta el futuro.

4.4 Restricciones de Liquidez

El modelo que analizamos a continuación es una variante del modelo de elección intertemporal analizado anteriormente. En el modelo estándar la única restricción a la que se enfrentan los individuos para transferir recursos intertemporalmente es la restricción presupuestaria. Ésta delimita la capacidad de ahorrar o endeudarse al flujo presente de ingresos futuros. A continuación supondremos que existen restricciones adicionales al intercambio en el mercado por parte de los agentes. Supongamos que por alguna razón no explicitada[3] los individuos encuentran restricciones a su capacidad para transferir consumo intertemporalmente.

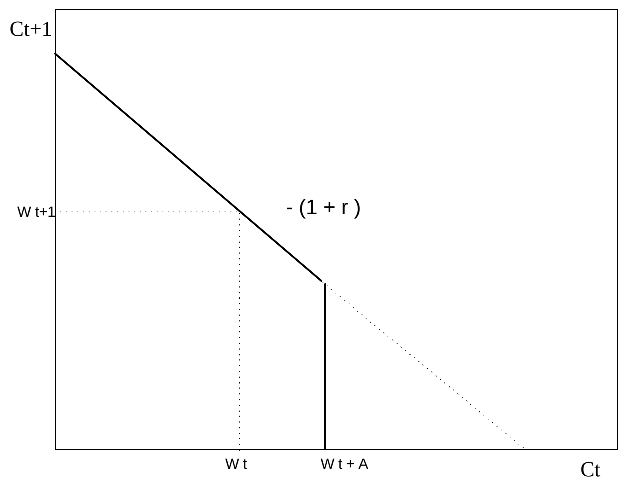
En ese sentido decimos que hay **mercados incompletos** pues los individuos no pueden realizar todas las transacciones que desearían. Por ejemplo,

[3]Son múltiples las razones que pueden generar este tipo de limitaciones al intercambio. Fundamentalmente, se trata de problemas de información asimétrica o problemas contractuales que pueden originar este tipo de incompletitudes de mercado. Más adelante se tratarán explicitamente estos aspectos.

una restricción adicional sería suponer que los individuos no pueden endeudarse más de un cierto nivel estipulado A, entonces la restricción de liquidez es $a_{t+1} \geq -A$. Su interpretación en términos de contratos implica que los individuos pueden vender bienes de consumo en $t+1$, pero en el momento t no pueden endeudarse por una cantidad superior a A. A pesar de que el intercambio de bienes en el mercado de consumo en t pueda ser beneficioso para todos los individuos, eliminamos esa posibilidad. En términos de la formulación Arrow-Debreu, esto implica la imposibilidad por parte de los agentes de firmar cierto tipo de contratos.

Este tipo de restricciones modifica el conjunto de elección del individuo, pues restringe el consumo del primer periodo a no ser superior a un cierto nivel de su renta.

Figura 6: Conjunto de elección con restricciones de liquidez



Formalmente, veamos cómo solucionar el problema de elección intertemporal cuando se añaden restricciones de liquidez. Para el caso general supondremos que el nivel de activos ha de cumplir la siguiente condición, $a_{t+1} \geq -A$ donde A es una constante que es lo suficiente pequeña como para afectar las decisiones de los individuos. Para que dicha restricción limite en términos efectivos la capacidad de endeudamiento de los hogares debe cumplirse que $A < w_{t+1}/(1+r_{t+1})$. En cambio valores de A iguales o superiores al valor actual neto de los ingresos futuros resultarían en una restricción redundante en el sentido de que no limita la capacidad de endeudamiento:

$$\max_{\{c_t, c_{t+1}, a_{t+1}\}} u(c_t) + \beta u(c_{t+1})$$

$$s.a. \qquad c_t + a_{t+1} \leq w_t$$

$$c_{t+1} \leq (1+r_{t+1})a_{t+1} + w_{t+1}$$

$$a_{t+1} \geq -A$$

$$c_t, c_{t+1} \geq 0$$

La solución a este problema depende de si la restricción de liquidez es operativa o no.

Caso 1(Restricción operativa): $a_{t+1} = -A$

La restricción de liquidez es operativa, de forma que el individuo a pesar de que le gustaría pedir prestado más recursos, se encuentra restringido a consumir un máximo dado por la suma del valor de su renta y la constante A. De forma que la elección óptima de este individuo es:

$$c_t^* = w_t + A$$

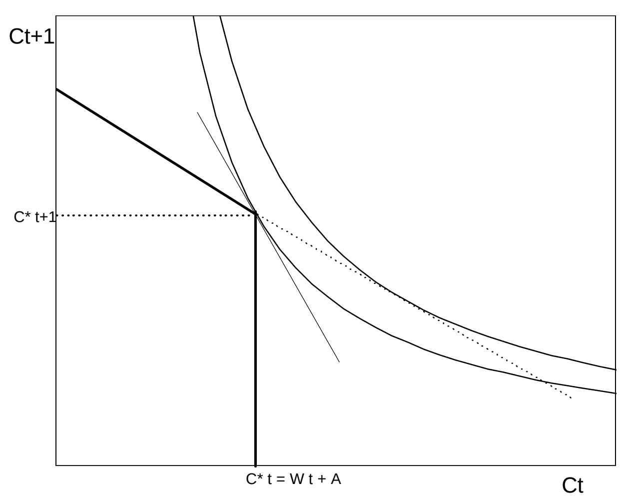
$$c_{t+1}^* = w_{t+1} - A(1 + r_{t+1})$$

Si $A = 0$, la mejor opción que tiene el individuo es el consumo de autarquía (consumir en cada momento su dotación de bienes, no habría intercambio con otros agentes en la economía). Si la restricción de liquidez es operativa, la Ecuación de Euler se cumple con desigualdad debido a la existencia de la restricción de liquidez, por lo tanto la solución del problema del consumidor no implica igualar la relación marginal de sustitución al tipo de interés de mercado.

$$\frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} > 1 + r_{t+1}$$

Esto implica que la relación marginal de sustitución entre el consumo presente y el consumo futuro es superior al tipo de interés. El bienestar del individuo es superior cuando no existe dicha restricción, pues puede alcanzar curvas de indiferencia superiores.

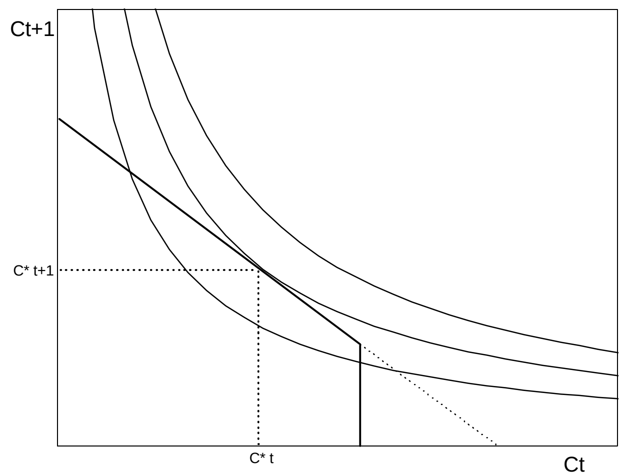
Figura 7: Solución con restricción de liquidez operativa



Caso 2 (Restricción no operativa): $a_{t+1} > -A$

Estamos en el caso anteriormente analizado, el individuo tiene incentivos a mantener una posición de activos superior a la marcada por la restricción. La solución del problema sin la restricción de liquidez es equivalente a la solución del problema con una restricción adicional que en equilibrio no es operativa. Estamos en el caso de las secciones anteriores.

Figura 7: Solución con restricción de liquidez no operativa



La solución formal al problema original se puede determinar a partir del método de Lagrange, como hicimos antes, con la diferencia de que se introduce la restricción de liquidez. El nuevo problema de elección es:

$$\max_{\{c_t,c_{t+1},a_{t+1},\lambda_t,\lambda_{t+1}\}} \pounds = u(c_t)+\beta u(c_{t+1})+\lambda_t(w_t-c_t-a_{t+1})+\lambda_{t+1}(w_{t+1}+(1+r_{t+1})a_{t+1}),$$

$$\begin{array}{rrcl} s.a. & c_t, c_{t+1} & \geq & 0 \\ & \lambda_t, \lambda_{t+1} & \geq & 0 \\ & a_{t+1} & \geq & -A \end{array}$$

Estas restricciones determinan la nonegatividad de los consumos, de los multiplicadores de Lagrange y la última es la restricción de liquidez. Las condiciones de primer orden:

$$\begin{array}{lrl} [c_t] & u'(c_t) - \lambda_t \leq 0 & (= 0 \quad si \quad c_t > 0) \\ [c_{t+1}] & \beta u'(c_{t+1}) - \lambda_{t+1} \leq 0 & (= 0 \quad si \quad c_{t+1} > 0) \\ [a_{t+1}] & -\lambda_t + \lambda_{t+1}(1 + r_{t+1}) \leq 0 & (= 0 \quad si \quad a_{t+1} > -A) \\ [\lambda_t] & w_t - c_t - a_{t+1} \geq 0 & (= 0 \quad si \quad \lambda_t > 0) \\ [\lambda_{t+1}] & (1 + r_{t+1})a_{t+1} + w_{t+1} - c_{t+1} \geq 0 & (= 0 \quad si \quad \lambda_{t+1} > 0) \end{array}$$

Compare estas condiciones con las que obtenía en el caso en que no había restricciones de liquidez y comprobará que el único cambio viene derivado de la condición $[a_{t+1}]$, que recoge un signo de desigualdad y establece que la condición se cumple con igualdad sólo cuando la restricción no sea operativa, $a_{t+1} > -A$, en cuyo caso la solución coincidiría con el caso en que no hay restricciones.

Realizando los mismos pasos que hicimos en el caso anterior para obtener la Ecuación de Euler, obtendríamos una expresión muy similar, pero con signos de desigualdad:

$$u'(c_t) \geq \beta u'(c_{t+1})(1 + r_{t+1}) \qquad (= \quad si \quad a_{t+1} > -A)$$

Esta ecuación junto con las restricciones presupuestarias determina la elección óptima de este individuo, tanto para el caso en que la restricción es operativa como cuando no lo es.

4.5 Problemas

1. Demostrar que las condiciones de primer orden asociadas a solucionar con la restricción secuencial es equivalente a la restricción intertemporal (téngase en cuenta que ahora sólo hay un multiplicador de Lagrange asociado).

2. Suponga que la función de utilidad es la siguiente, $u(c_t) = \ln c_t$:

   (a) Demostrar que la función de utilidad propuesta satisface las hipótesis básicas.

   (b) Derivar la Ecuación de Euler asociada a esta función de utilidad.

   (c) Hallar las funciones de consumo en cada periodo y la función de ahorro.

   (d) Compruebe que las demandas óptimas $(c_t^*,\ c_{t+1}^*)$ agotan toda la renta.

   (e) Demostrar bajo qué condiciones el nivel de activos es negativo.

3. Si la función de utilidad es, $u(c_t) = (c_t^{1-\sigma} - 1)/(1 - \sigma)$.

   (a) Demuestre que σ es la inversa de la elasticidad de sustitución entre el consumo presente y futuro.

   (b) Solucionar los apartados del ejercicio anterior para esta nueva función de utilidad.

(c) ¿Qué resultados se obtienen cuando $\sigma = 1$?

4. Con las mismas preferencias que en el problema anterior suponga que el individuo se enfrenta a un impuesto sobre el consumo de cada periodo, τ, proporcional a la cuantía del consumo.

   (a) Escriba las nuevas restricciones presupuestarias secuenciales y obtenga la restricción intertemporal.

   (b) ¿Qué efectos tiene el impuesto sobre la elección intertemporal? ¿Crea alguna distorsión en las decisiones de ahorro?

   (c) ¿Qué ocurriría si el impuesto sobre el consumo sólo existiera en el primer periodo?, ¿cambiarían las condiciones de primer orden?

5. Considere que la función de utilidad es del tipo $u(\cdot) = \ln c_t$.

   (a) Dibujar la restricción Arrow-Debreu y solucionar el modelo graficamente.

   (b) Solucionar el problema de elección en t y derivar las cantidades consumidas en cada momento del tiempo.

   (c) Explicar el concepto de contrato intertemporal en relación al concepto de ahorro utilizado en la sección anterior. Nótese que en este caso no existe ningún mecanismo adicional a los contratos para transferir recursos entre dos periodos.

   (d) Reinterprete la ecuación de Euler.

   (e) ¿Cuál es la relación de precios existente entre dos periodos?

6. Considere el problema de un individuo que debe decidir la asignación intertemporal de consumo entre dos periodos. Suponga que las preferencias son representables mediante la siguiente función de utilidad $U(c_t, c_{t+1}) = c_t + \ln c_{t+1}$, y la restricción presupuestaria es de tipo Arrow-Debreu:

$$p_t c_t + p_{t+1} c_{t+1} = p_t w_t + p_{t+1} w_{t+1},$$

   Con esta información responda a las siguientes cuestiones:

   (a) Solucionar gráficamente el problema de elección.

   (b) Hallar las funciones de consumo.

(c) Si $\beta = 0.6$, $r_{t+1} = 20\%$ y las dotaciones de recursos de cada periodo son $w_t = 10$, $w_{t+1} = 20$. Hallar numéricamente los consumo óptimos.

(d) Explicar el concepto de contrato intertemporal en relación al concepto de ahorro.

7. Considere el problema de un individuo que debe decidir la asignación intertemporal de consumo entre dos periodos. Suponga que las preferencia son representables mediante la siguiente función de utilidad $U(c_t, c_{t+1}) = c_t c_{t+1}^{\beta}$, y la restricción presupuestaria es de tipo secuencial. Con esta información responda a las siguientes cuestiones.

   (a) Solucionar gráfica y formalmente el problema de elección si $\beta = 0.5$, $r_{t+1} = 11\%$ y las dotaciones de recursos de cada periodo son $w_t = w_{t+1} = 10$.

   (b) Suponga que existe la siguiente restricción de liquidez, $a_{t+1} \geq -1$. Afectará dicha restricción a la solución obtenida en el apartado anterior?. ¿Cuál será el nuevo patrón intertemporal de consumo de equilibrio?

   (c) ¿Qué significado económico tendría $a_{t+1} \geq 1$?

8. Analizar el caso de restricciones de liquidez del siguiente tipo, $a_{t+1} \geq -A$, donde $A > 0$.

   (a) Soluciónelo gráfica y formalmente.

   (b) ¿Qué ocurre cuando $A \to \infty$, es decir se hace arbitrariamente grande?

   (c) ¿Qué significado económico tiene $A < 0$?, ¿dé una interpretación y solucione el problema?