

Problemas: Expectativas Racionais  
Macroeconomia  
Mestardo em Economia

**Vivaldo Mendes**

ISCTE-IUL, Outubro 2010

# Exercício 1

Assuma o seguinte sistema de dimensão 2

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= 0.8x_t + 2y_t \\y_{t+1} &= 4 + 0.5y_t\end{aligned}$$

Pretende-se:

1. Determine o equilíbrio de longo prazo do sistema;
2. Este equilíbrio é único ou há mais que um equilíbrio;
3. Usando os valores dos eigenvalues (valores próprios) da matriz característica do sistema, determine se o equilíbrio é estável ou instável?
4. Suponha agora que a dinâmica de  $y$  é dada pela seguinte equação

$$y_{t+1} = 4 + 5y_t + \epsilon_t$$

onde  $\epsilon_t$  é uma variável aleatória com observações independentes e indenticamente distribuídas, e com média nula. Que alterações se processarão no equilíbrio de longo prazo deste sistema e quanto ao tipo da sua estabilidade.

# Exercício 2

No exercício anterior, apesar de um dos coeficientes  $a_i$  ser superior a 1 (temos o número 2 a afectar  $y_t$  na primeira equação), o sistema continuava a ter um equilíbrio estável. Não pense que o facto de ter todos os coeficientes menores que 1 em módulo lhe garantirá um sistema com um equilíbrio estável. É o que vamos mostrar de seguida.

Assuma o seguinte sistema de dimensão 2

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= 0.2x_t + 0.4y_t + 2 \\y_{t+1} &= 0.5x_t - 0.9y_t + 40\end{aligned}$$

Pretende-se:

1. Determine o equilíbrio de longo prazo do sistema;
2. Este equilíbrio é único ou há mais que um equilíbrio;
3. Usando os valores dos eigenvalues (valores próprios) da matriz característica do sistema, mostre que o equilíbrio é instável.

## Exercício 3

Este exercício tem por objectivo comparar os valores de equilíbrio e o tipo de estabilidade de processos dinâmicos com variáveis pré-determinadas versus variáveis de control (ou "forward looking variables").

1. Resolva o seguinte modelo:  $y_t = 0.8y_{t-1} + 20$ .
2. Como caracteriza o equilíbrio de longo prazo deste processo?
3. Compare os resultados das duas questões anteriores com os resultados da solução do modelo  $y_t = 0.8E_t y_{t+1} + 20$ .

## Exercício 4

Suponha um processo dinâmico expresso pela seguinte equação

$$y_t = \alpha + \beta E_t y_{t+1} + u_t$$

onde  $(\alpha, \beta)$  são parâmetros, e  $u_t$  uma variável exógena.  $E_t y_{t+1}$  representa as expectativas formuladas sobre  $y_{t+1}$  com a informação disponível em  $t$ .

1. Apresente a solução com expectativas racionais para o processo  $y_t$ , assumindo que  $|\beta| < 1$ .
2. Qual a importância dos parâmetros  $(\alpha, \beta)$  para o estudo da estabilidade do processo.
3. Considera o tipo de equação acima apresentada relevante para o estudo de processos económicos ou financeiros? justifique.
4. Suponha agora que  $u_t$  corresponde a um processo autorregressivo de 1ª ordem dado por

$$u_t = \psi + \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad |\rho| < 1$$

onde  $\psi$  é uma constante, e  $\varepsilon_t$  é uma variável aleatória com observações independentes e indenticamente distribuídas, e com média nula. Apresente a solução com expectativas racionais para o processo  $y_t$  com esta informação adicional.

## Exercício 5

Suponha um processo dinâmico expresso pela seguinte equação

$$E_t y_{t+1} = \alpha + \beta y_t + u_t$$

onde  $(\alpha, \beta)$  são parâmetros, e  $u_t$  uma variável exógena.  $E_t y_{t+1}$  representa as expectativas formuladas sobre  $y_{t+1}$  com a informação disponível em  $t$ .

1. Apresente a solução com expectativas racionais para o processo  $y_t$ .
2. Qual a importância dos parâmetros  $(\alpha, \beta)$ , bem como da variável  $u_t$ , para o estudo da estabilidade do processo.
3. Considere o tipo de equação acima apresentada relevante para o estudo de processos econômicos ou financeiros? justifique.
4. Suponha agora que  $u_t$  assume o mesmo valor para todo o  $t$ , ou seja

$$u_t = 10$$

Apresente a solução com expectativas racionais para o processo  $y_t$  com esta informação adicional.

## Exercício 6

Nas aulas foi demonstrado que se tivermos a seguinte equação

$$E_t y_{t+1} = a y_t + x_t, \quad |a| < 1$$

a solução forward leva a que a solução com expectativas racionais seja explosiva. A solução backward fornece o seguinte resultado para o conjunto de iterações de  $i$  até  $n$ :

$$y_t = a^n y_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (a^i) z_{t-i} + \sum_{i=0}^{n-1} (a^i) x_{t-i-1}$$

Suponha que os "economic fundamentals", representados  $x_t$ , apresentam um valor médio constante tal que

$$x_t = 10.$$

1. Será que o valor de  $y_t$  fica determinado com a informação existente? Justifique.

2. O que são "sunspots", ou "animal spirits" na teoria económica moderna? Terão alguma relevância para explicar recessões ou "booms" económicos?
3. Considera razoável que "sunspots" persistam num processo inteiramente determinístico como o que acabámos de analisar (ou seja,  $x_t = 10$ , para  $t \in (0, n - 1)$ ). Justifique.
4. Suponha agora que  $x_t$  corresponde a um processo autorregressivo de 1ª ordem dado por

$$x_t = \rho x_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad |\rho| < 1$$

onde  $\varepsilon_t$  é uma variável aleatória com observações independentes e indenticamente distribuídas, e com média nula. Apresente a solução com expectativas racionais para o processo  $y_t$  com esta informação adicional.

5. Responda ao mesmo tipo de questão tal como em (3), mas agora sabendo que o processo que estamos a analisar é um processo estocástico dado em (4).

## Exercício 7 (objectivo: mostrar como funcionam as funções impulso resposta nestes processos)

Suponha que solução forward fornece o seguinte resultado para o conjunto de iterações de 1 até  $n$  :

$$y_t = a^n y_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (a^i) E_t x_{t+i} \quad , \quad |a| < 1$$

Suponha que os "economic fundamentals" ( $x_t$ ) são representados por um processo autorregressivo de 1ª ordem dado por

$$x_t = \rho x_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad |\rho| < 1$$

onde  $\varepsilon_t$  é uma variável aleatória com observações independentes e indenticamente distribuídas e com média nula. Apresente a solução com expectativas racionais para o processo  $y_t$  com esta informação adicional, mas levando em consideração que  $E_t x_{t+i}$  pode também ser dado pela expressão

$$E_t x_{t+i} = \rho^i x_t \tag{1}$$

(**Nota:** se  $i \rightarrow \infty$ ,  $\rho^i \rightarrow 0$ , e  $E_t x_{t+i} = 0$ . Note que este resultado está em inteira conformidade com o resultado obtido na pergunta 4 do exercício 5.

No entanto, como pode ser útil estudar a evolução de  $y_t$  no **curto prazo** (e não apenas relativamente ao seu equilíbrio de longo prazo, como foi feito na pergunta 4 do exercício 5), por isso, na solução considere o valor de  $E_t x_{t+i}$  conforme equação (1), e não como  $E_t x_{t+i} = 0$ .

## Exercício 8

Suponha um processo dinâmico expresso pela seguinte equação

$$\begin{aligned}\pi_t &= \beta E_t \pi_{t+1} + \lambda y_t \\ y_t &= E_t y_{t+1} - \frac{1}{\sigma} (i_t - E_t \pi_{t+1}) \\ i_t &= \bar{i}\end{aligned}$$

onde  $(\beta, \lambda, \sigma)$  são parâmetros, e  $i_t$  uma variável exógena.  $E_t(\cdot)_{t+1}$  representa as expectativas formuladas sobre  $(\cdot)_{t+1}$  com a informação disponível em  $t$ .

1. Reescreva o modelo na forma matricial, de forma a estudar a sua estabilidade.
2. Para o seguinte conjunto de valores para os parâmetros, diga se o equilíbrio deste modelo é determinado e estável. Justifique.

$$\beta = 0.8, \quad \lambda = 0.6, \quad \sigma = 2$$

## Exercício 9

Considere os dados do exercício anterior, mas assuma agora que, em vez de ter  $i_t = \bar{i}$ , passa a considerar que

$$i_t = \theta \pi_t$$

Isto verifica-se em dois cenários possíveis

$$\text{Cenário A : } \quad \theta = 0.5$$

$$\text{Cenário B : } \quad \theta = 1.1$$

O equilíbrio deste modelo é determinado e estável? Justifique em função do valor de  $\theta$  em cada um dos cenários.

## Exercício 10

Suponha que a evolução temporal da dívida pública em percentagem do PIB ( $d_t$ ) é dada pela seguinte equação

$$d_{t+1} = -s_{t+1} + (1 + \phi) d_t$$

sendo  $s$  o nível do superavit primário em % do PIB, e  $1 + \phi = \frac{1 + r}{1 + g}$ , onde  $r$  é a taxa de juro real, e  $g$  a taxa de crescimento do PIB em termos reais.

Determine a condição que garanta a sustentabilidade da dívida pública no longo prazo, sabendo que os agentes privados tem expectativas racionais.