Soluções
Expectativas Racionais

Mestrado de Economia 2010

Vivaldo Mendes

ISCTE–Instituto Universitário de Lisboa

Outubro 2010

Atenção. Estas soluções apresentam todos (TODOS!!) os passos necessários para a resolução dos exercícios sobre expectativas racionais.

Por isso, parecem bem mais longas do que normalmente é esperado aparecer numa folha de teste. Expurgando o texto que é utilizado nas explicações passo a passo, as soluções não ocupam mais do que meia página de uma folha A4 manuscrita.

Não estão isentas de gralhas tipográficas. Se detectarem algumas, feedback é agradecido.

Exercício 1

Assuma o seguinte sistema de dimensão 2

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 0.8x_t + 2y_t \\ y_{t+1} &= 4 + 0.5y_t \end{aligned}$$

Pretende-se:

1. Determine o equilíbrio de longo prazo do sistema;
2. Este equilíbrio é único ou há mais que um equilíbrio;
3. Usando os valores dos eigenvalues (valores próprios) da matriz característica do sistema, determine se o equilíbrio é estável ou instável?

4. Suponha agora que que a dinâmica de y é dada pela seguinte equação

$$y_{t+1} = 4 + 5y_t + \epsilon_t$$

onde ϵ_t é uma variável aleatória com observações independentes e indenticamente distribuídas, e com média nula. Que alterações se processarão no equilíbrio de longo prazo deste sistema e quanto ao tipo da sua estabilidade.

Solução E1.

Foi visto que uma equação às diferenças (sem expectativas racionais) do tipo $x_{t+1} = b + a \cdot x_t$, terá solução ou não, será estável ou instável, dependendo do valor do parâmtero a. Se $|a| < 1$, o equilíbrio de longo prazo existe e é estável, se $|a| > 1$, o equilíbrio de longo prazo existe mas é instável, se $|a| = 1$ este equilíbrio não existe.

É este tipo de problema que temos aqui neste exercício. Só que com uma pequena nuance: temos um sistema com duas equações, não apenas uma. Neste contexto, o que será equivalente neste sistema ao nosso a acima? Os *valores próprios* da matriz característica que representa os parâmetros do sistema relativamente a x e y.

1. Para determinar o equilíbrio de longo prazo, basta aplicar a condição

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x_t = \bar{x} \\ y_{t+1} &= y_t = \bar{y} \end{aligned}$$

Assim, da segunda eq. obteremos

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= 4 + 0.5y_t \\ \bar{y} &= 4 + 0.5\bar{y} \\ \bar{y} &= 8 \end{aligned}$$

Agora a segunda virá

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 0.8x_t + 2y_t \\ \bar{x} &= 0.8\bar{x} + 2\bar{y} \\ \bar{x} &= 0.8\bar{x} + 2 \times 8 \\ \bar{x} &= 80 \end{aligned}$$

Portanto, o equilíbrio de longo existe $(\bar{y} = 8, \bar{x} = 80)$

2. É único pois só existe um par de valores que satisfaz a condição de equilíbrio (o sistema é linear, logo só pode existir um par de valores).

3. Será estável? A resposta requer o cálculo daquilo a que chamamos valores próprios. O que são estes? Vamos re-escrever o sistema acima na forma matricial (note que é totalmente equivalente)

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 0.8x_t + 2y_t + 0 \\ y_{t+1} &= 0x_t + 0.5y_t + 4 \end{aligned}$$

Agora teremos

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 2 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\mathbf{z}_{t+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}_t + \mathbf{v}$$

Para calcular os valores próprios (eigenvalues) da matriz $\mathbf{A}$ fazemos

$$[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2] = \begin{bmatrix} 0.8-\lambda & 2 \\ 0 & 0.5-\lambda \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{I}_2$ é a matriz identidade de ordem 2. Calculando o determinante de $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2)$ e igualando-o a zero virá

$$\det\left[(0.8-\lambda)(0.5-\lambda) - (2 \times 0)\right] = 0$$

de onde obteremos

$$0.4 - 1.3\lambda + \lambda^2 = 0$$

Desta expressão quadrática, poderemos obter dois valores para λ que staisfazem aquela igualdade, ou seja os valores dos tais **valores próprios**. A expressão geral da solução da expressão quadrática é

$$\begin{aligned} \lambda_1, \lambda_2 &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-1.2) \pm \sqrt{(-1.3)^2 - (4 \times 1 \times 0.4)}}{2 \times 1} \\ &= \frac{1.3 \pm \sqrt{1.69 - 1.6}}{2} \end{aligned}$$

Ou seja: $\lambda_1 = (1.3 + 0.3)/2 = 0.8$; $\lambda_2 = (1.3 - 0.3)/2 = 0.5$. Como ambos os valores próprios são $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$, logo o **equilíbrio de longo prazo é estável** (é o equivalente ao parâmetro a da nossa equação às diferenças ser $|a| < 1$).

As respostas a estas três perguntas iniciais podem ser totas confirmadas na figura 1.

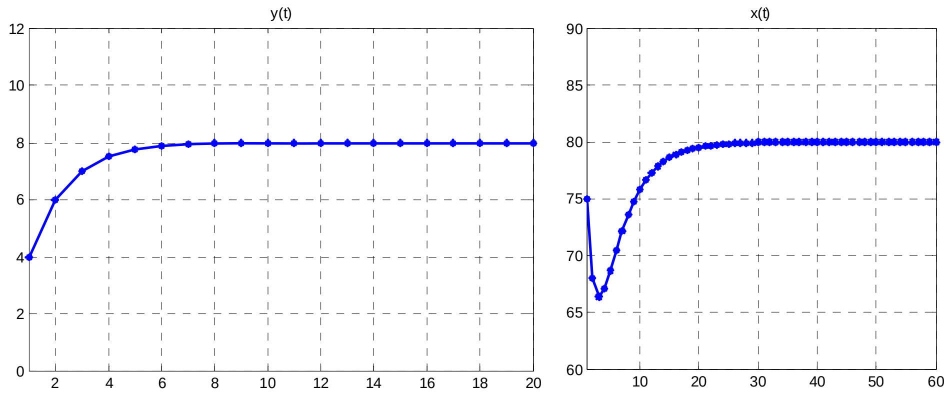

Figure 1:

3. Como agora teremos que a dinâmica de y sofre uma série de choques exógenos (ϵ_t), sendo dada por

$$y_{t+1} = 4 + 5y_t + \epsilon_t$$

então, tudo irá depender do tipo de choques que estamos considerando. É-nos dito que estes choques são white noise (média nula e com observações independentes e indenticamente distribuídas). O caso em que os choques têm média igual a zero e a variância igual a 1, pode ser visto na Fig 2.

Portanto, como os choques têm média nula, e são independentes e identicamente distribuídos, não irão alterar nem o tipo de equilíbrio, nem a sua estabilidade. A única coisa que que se altera é que agora teremos um equilíbrio estocástico, e não um equilíbrio determinístico. Ou seja

$$\begin{aligned} Ey &= 8 \\ Ex &= 80 \end{aligned}$$

já que

$$E\epsilon = 0$$

A dinâmica das duas variáveis, já incluindo os choques, pode ser vista na Fig 3.

Exercício 2

No exercício anterior, apesar de um dos coeficientes a_i ser superior a 1 (temos o número 2 a afectar y_t na primeira equação), o sistema continuava a ter um equilíbrio estável. Não pense que o facto de ter todos os

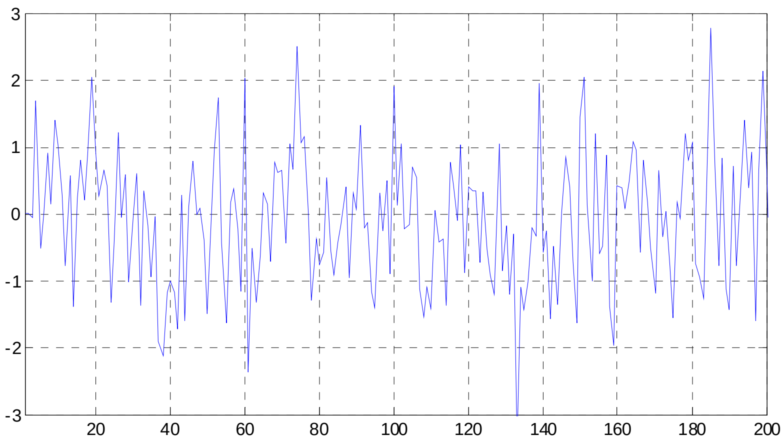

Figure 2:

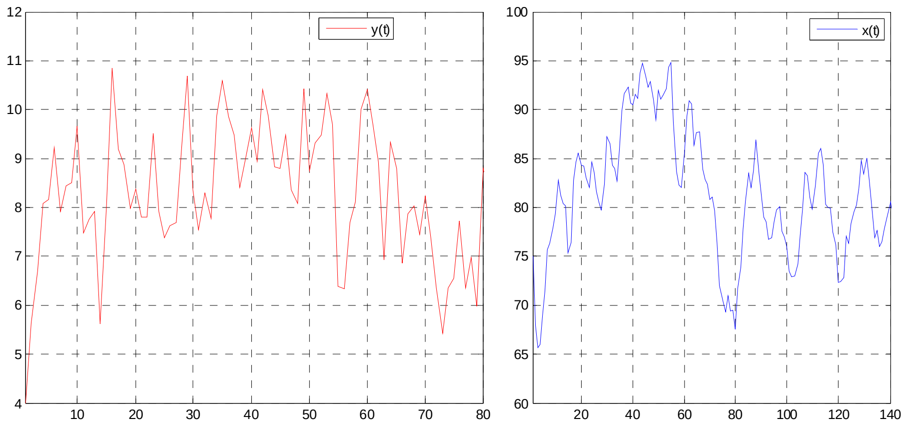

Figure 3:

coeficientes menores que 1 em módulo lhe garantirá um sistema com um equilíbrio estável. É o que vamos mkostar de seguida.

Assuma o seguinte sistema de dimensão 2

$$
\begin{aligned}
x_{t+1} &= 0.2x_t + 0.4y_t + 2 \\
y_{t+1} &= 0.5x_t - 0.9y_t + 40
\end{aligned}
$$

Pretende-se:

1. Determine o equilíbrio de longo prazo do sistema;
2. Este equilíbrio é único ou há mais que um equilíbrio;
3. Usando os valores dos eigenvalues (valores próprios) da matriz característica do sistema, mostre que o equilíbrio é instável.

Solução E2.

1. Impondo a condição de equilíbrio

$$
\begin{aligned}
x_{t+1} &= x_t = \bar{x} \\
y_{t+1} &= y_t = \bar{y}
\end{aligned}
$$

obteremos

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x} = 0.2\bar{x} + 0.4\bar{y} + 2 \\ \bar{y} = 0.5\bar{x} - 0.9\bar{y} + 40 \end{array} \right., \text{ Solution is: } \{[\bar{x} = 15.0, \bar{y} = 25.0]\}$$

2. O equilíbrio é único.

3. Do Matlab obtiveram-se de forma imediata os dois eigenvalues do sistema.

```
>> A=[0.2,0.4;0.5,-0.9]
A =
0.2000  0.4000
0.5000  -0.9000
>> eig(A)
ans =
0.3589
-1.0589
```

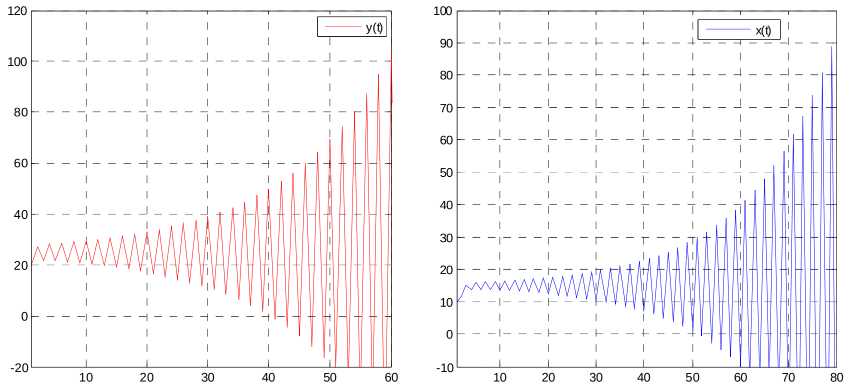

Figure 4:

Ou seja, temos um eigenvalue menor do que 1 (em módulo), e um maior que um. Neste caso o equilíbrio é instável. As duas variáveis oscilam à volta do seu equilíbrio, com as oscilações a serem cada vez maiores.

Exercício 3

Este exercício tem por objectivo comparar os valores de equílibrio e o tipo de estabilidade de processos dinâmicos com variáveis **pré-determinadas** versus **variáveis "forward looking".**

1. Resolva o seguinte modelo: $y_t = 0.8y_{t-1} + 20$.
2. Como caracteriza o equilíbrio de longo prazo deste processo?
3. Compare os resultados das duas questões anteriores com os resultados da solução do modelo $y_t = 0.8E_t y_{t+1} + 20$.

Solução E3.

1. A solução é imediata. Impondo a condição de equilíbrio

$$y_t = y_{t-1} = \bar{y}$$

obteremos

$$\begin{aligned} y_t &= 0.8y_{t-1} + 20 \\ \bar{y} &= 20 + 0.8\bar{y} \\ \bar{y} &= 100 \end{aligned}$$

2. Como $|0.8| < 1$, o processo tem um equilíbrio estável. Este equilíbrio é, por outro lado, único visto que a solução que resulta da condição de equilíbrio apresenta apenas um valor para $\bar{y}$ que satisfaz a referida condição.

3. Não se preocupe com a escolha de iterar "forward" ou "backwards", desde já. Das aulas deverá lembrar-se que como temos uma "forward looking variable", e como $|1/0.8| > 1$, uma solução estável deverá ser obtida iterando forward.[1]

No entanto, não se deverá preocupar com isso desde já: *como já tem o valor esperado no lado direito, elimine o mesmo iterando para a frente.*

Assim

$$y_t = 0.8E_t y_{t+1} + 20 \tag{1}$$

sabemos que $y_{t+1} = 0.8E_{t+1}y_{t+2} + 20$. Aplicando o valor esperado a esta equação, e sabendo que da lei das iteração das expectativas $E_{t+1}y_{t+2} = E_t y_{t+2}$, teremos

$$E_t y_{t+1} = 0.8E_t y_{t+2} + 20 \tag{2}$$

Substitua (2) de volta à eq. (1) e obterá

$$\begin{aligned} y_t &= 0.8\,(0.8E_t y_{t+2} + 20) + 20 \\ &= 0.8^2 E_t y_{t+2} + 0.8 \times 20 + 20 \end{aligned} \tag{3}$$

Voltamos novamente a eliminar $E_t y_{t+2}$ desta última eq., porque sabemos que

$$E_t y_{t+2} = 0.8E_t y_{t+3} + 20$$

Logo

$$\begin{aligned} y_t &= 0.8^2\,(0.8E_t y_{t+3} + 20) + 0.8 \times 20 + 20 \\ &= 0.8^3 E_t y_{t+3} + \left(0.8^2 \times 20 + 0.8 \times 20 + 20\right) \end{aligned}$$

De onde já é bem visível um padrão para a solução para a iteração n

$$y_t = (0.8)^n\, E_t y_{t+n} + \sum_{i=0}^{n-1} (0.8)^i \times 20$$

A solução final será obtida quando impormos a condição $n \to \infty$. Assim, $(0.8)^n \to 0$, quando $n \to \infty$, ficando a solução

$$y_t = \sum_{i=0}^{n-1} (0.8)^i \times 20$$

[1] Note que devemos levar em consideração 1/0.8, e não simplesmente 0.8, por uma simples razão. Nas aulas, a condição de estabilidade foi definida em função de termos $E_t y_{t+1}$ do lado esquerdo da equação, ou seja, a partir de $E_t y_{t+1} = f(y_t)$, e não de $y_t = f^{-1}(E_t y_{t+1})$.

Agora o passo final é simples. A soma $\sum_{i=0}^{n-1}(0.8)^i \times 20$ representa uma série geométrica em que o *primeiro termo* é 20 e a *razão* é 0.8. Como se lembrarão da licenciatura, se $n \to \infty$, a série converge para

$$y_t = \frac{1^o\ termo}{1 - razão} = \frac{20}{1 - 0.8} = 100$$

Comparando os dois modelos: o primeiro pôde ser resolvido para o passado ("backward-looking solution"), e seja qual o ponto de partida converge para o equilíbrio ($|0.8| < 1$), que é único. O segundo resolveu-se por "forward-looking solution" e como $|1/0.8| > 1$ o equilíbrio é único e também estável.

Exercício 4

Suponha um processo dinâmico expresso pela seguinte equação

$$y_t = \alpha + \beta E_t y_{t+1} + u_t$$

onde (α, β) são parâmetros, e u_t uma variável exógena. $E_t y_{t+1}$ representa as expectativas formuladas sobre y_{t+1} com a informação disponível em t.

1. Apresente a solução com expectativas racionais para o processo y_t, assumindo que $|\beta| < 1$.

2. Qual a importância dos parâmetros (α, β) para o estudo da estabilidade do processo.

3. Considera o tipo de equação acima apresentada relevante para o estudo de processos económicos ou financeiros? justifique.

4. Suponha agora que u_t corresponde a um processo autorregressivo de 1^a ordem dado por

$$u_t = \psi + \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad |\rho| < 1$$

onde ψ é uma constante, e ε_t é uma variável aleatória com observações independentes e indenticamente distribuídas, e com média nula. Apresente a solução com expectativas racionais para o processo y_t com esta informação adicional.

Solução E4.

1. Este exercício é totalmente semelhante à alínea (3) do exercício anterior. A única diferença consiste no facto de agora não termos os valores dos parâmetros (para além de existir mais um parâmetro na equação, α), e do último termo da equação ser uma variável exógena (u_t), em vez de uma constante (20). Como verá, o facto de u_t corresponder a um processo autorregressivo de 1^a ordem irá alterar a solução, mas pouco.

O processo de iteração é totalmente idêntico ao da alínea (3) anterior. Assim

$$y_t = \alpha + \beta E_t y_{t+1} + u_t \tag{4}$$

sabemos que $y_{t+1} = \alpha + \beta E_t y_{t+2} + u_{t+1}$. Aplicando o valor esperado a esta equação, teremos

$$E_t y_{t+1} = \alpha + \beta E_t y_{t+2} + E_t u_{t+1} \tag{5}$$

Substitua (5) de volta na eq. (4) e obterá

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha + \beta \left(\alpha + \beta E_t y_{t+2} + E_t u_{t+1} \right) + u_t \\ &= \alpha + \beta\alpha + \beta^2 E_t y_{t+2} + \beta E_t u_{t+1} + u_t \end{aligned} \tag{6}$$

Eliminamos $E_t y_{t+2}$ desta última eq., porque sabemos que

$$E_t y_{t+2} = \alpha + \beta E_t y_{t+3} + E_t u_{t+2} \tag{7}$$

Logo, substituindo (7) de volta em (6), teremos

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha + \beta\alpha + \beta^2 \left(\alpha + \beta E_t y_{t+3} + E_t u_{t+2} \right) + \beta E_t u_{t+1} + u_t \\ &= \alpha + \beta\alpha + \beta^2\alpha + \beta^3 E_t y_{t+3} + \beta^2 E_t u_{t+2} + \beta E_t u_{t+1} + u_t \end{aligned}$$

Rearranjando, podemos obter

$$y_t = \beta^3 E_t y_{t+3} + \left(\alpha + \beta\alpha + \beta^2\alpha \right) + \left(\beta^2 E_t u_{t+2} + \beta E_t u_{t+1} + u_t \right)$$

De onde já é bem visível um padrão para a solução

$$y_t = (\beta)^n E_t y_{t+n} + \sum_{i=0}^{n-1} (\beta)^i \alpha + \sum_{i=0}^{n-1} (\beta)^i E_t u_{t+i}$$

A solução final será obtida quando $n \to \infty$. Assim, para que $(\beta)^n \to 0$, quando $n \to \infty$, teremos de impor a restrição

$$|\beta| < 1, \quad \text{ou de forma equivalente que } |1/\beta| > 1$$

Assumindo que $|\beta| < 1$, teremos

$$y_t = \sum_{i=0}^{n-1} (\beta)^i \alpha + \sum_{i=0}^{n-1} (\beta)^i E_t u_{t+i} \tag{8}$$

Agora o passo final é simples. A soma $\sum_{i=0}^{n-1} (\beta)^i \alpha$ representa uma série geométrica em que o primeiro termo é α e a razão é β. Como foi feito na alínea (3) do exercício anterior, se $n \to \infty$, a série converge para

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\beta)^i \alpha = \frac{1^o \ termo}{1 - razão} = \frac{\alpha}{1-\beta} \tag{9}$$

Basta substituir (9) de volta na eq. (8) e teremos

$$y_t = \frac{\alpha}{1-\beta} + \sum_{i=0}^{n-1} (\beta)^i E_t u_{t+i} \tag{10}$$

2. Portanto o equilíbrio é único e estável. Na eq. inicialmente dada, $y_t = \alpha + \beta E_t y_{t+1} + u_t$, o parâmetro α em nada afecta a estabilidade do processo, enquanto que esta depende inteiramente do parâmetro β. O equilíbrio tem estas características devido à restrição dada no exercício: $|\beta| < 1$, ou de forma equivalente que $|1/\beta| > 1$.

3. De facto, nos processos económicos e financeiros abundam vários situações em que decisões dependem dos valores esperados das variáveis no futuro. Por exemplo:

- O investimento que uma empresa faz (ou não) hoje, depende dos cash-flows esperados no futuro descontados para o presente;
- A compra de uma casa hoje depende do rendimento esperado no futuro, bem como da taxa de juro esperada no futuro;
- O preço de activo financeiro transaccionado hoje depende dos dividendos esperados no futuro descontados para o presente;
- etc...

4. Esta questão tem a ver como será calculado, na eq. (8), o valor de

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\beta)^i E_t u_{t+i} = ????$$

Como u_t corresponde a um processo autorregressivo de 1^a ordem dado por

$$u_t = \psi + \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad |\rho| < 1$$

então, nós não podemos saber em t os valores objectivos de u_{t+i} ao longo do tempo. Apenas podemos calcular o valor esperado em t de u_{t+i} (ou seja,

$E_t u_{t+i}$), para $i = 0, 1, 2, ...$ Este é dado por (ver nota no fim deste exercício sobre este resultado)

$$E_t u_{t+i} = \frac{\psi}{1-\rho}, \qquad \text{para } i = 0, 1, 2, ... \tag{11}$$

Logo o valor de $\sum_{i=0}^{n-1} (\beta)^i u_{t+i}$ será dado por

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\beta)^i E_t u_{t+i} = \frac{1^o \ termo}{1 - razão} = \frac{\frac{\psi}{1-\rho}}{1-\beta} = \frac{\psi}{(1-\beta)(1-\rho)} \tag{12}$$

Agora basta substituir (12) de volta na eq. (10) e teremos

$$y_t = \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{\psi}{(1-\beta)(1-\rho)}$$

Nota E3(4): Esta nota refere-se à resposta da alínea (4) do presente exercício.

Na equação (11) obtivémos o resultado

$$E_t u_{t+i} = \frac{\psi}{1-\rho}$$

Porque razão? A razão é simples e pode ser mostrada de várias formas. Uma é intuitiva. Um processo AR(1) representa a soma de uma parte determinística (conhecida) e uma parte aleatória (não conhecida)

$$u_t = \underbrace{\psi + \rho u_{t-1}}_{\det er \min istica} + \underbrace{\varepsilon_t}_{aleatória} \quad , \quad |\rho| < 1$$

Como é assumido que a parte aleatória tem uma média nula (white noise), então $E_t \varepsilon_{t+i} = 0$. Logo o valor esperado $E_t u_{t+i}$ será inteiramente determinado pela parte determinística. Mas a parte determinística converge para o seu equilíbrio de longo prazo (que é conhecido), que é estável em virtude de $|\rho| < 1$, e é dado por

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \psi + \rho \bar{u} \\ &\text{logo} \\ \bar{u} &= \frac{\psi}{1-\rho} \end{aligned}$$

Portanto

$$E_t u_{t+i} = E_t \bar{u} = \frac{\psi}{1-\rho}.$$

Existe uma segunda forma de chegar a este resultado que é imediata. Se

$$u_t = \psi + \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

Então, aplicando o operador de expectativas a esta expressão, e assumindo que este operador não depende do tempo (o que é legítimo porque sabemos que o processo é estacionário, pois $|\rho| < 1$), teremos

$$E_t u_t = E_t \psi + \rho E_t u_{t-1} + E_t \varepsilon_t$$

de onde virá

$$E_t u_t = \psi + \rho E_t u_t + 0$$

ou seja, para todo o t, teremos

$$E_t u_t = \frac{\psi}{1-\rho}.$$

Exercício 5

Suponha um processo dinâmico expresso pela seguinte equação

$$E_t y_{t+1} = \alpha + \beta y_t + u_t$$

onde (α, β) são parâmetros, e u_t uma variável exógena. $E_t y_{t+1}$ representa as expectativas formuladas sobre y_{t+1} com a informação disponível em t.

1. Apresente a solução com expectativas racionais para o processo y_t.
2. Qual a importância dos parâmetros (α, β), bem como da variável u_t, para o estudo da estabilidade do processo.
3. Considera o tipo de equação acima apresentada relevante para o estudo de processos económicos ou financeiros? justifique.
4. Suponha agora que u_t assume o mmesmo valor para todo o t, ou seja

$$u_t = 10$$

Apresente a solução com expectativas racionais para o processo y_t com esta informação adicional.

É deixado para os alunos resolverem. Totalmente idêntico aos dois exercícios antriores.

Exercício 6

Nas aulas foi demonstrado que se tivermos a seguinte equação

$$E_t y_{t+1} = a y_t + x_t \quad , \quad |a| < 1$$

a solução forward leva a que a solução com expectativas racionais seja explosiva. A solução backward fornece o seguinte resultado para o conjunto de iterações de i até n :

$$y_t = a^n y_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \left(a^i\right) z_{t-i} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(a^i\right) x_{t-i-1}$$

Suponha que os "economic fundamentals", representados x_t, apresentam um valor médio constante tal que

$$x_t = 10.$$

1. Será que o valor de y_t fica determinado com a informação existente? Justifique.

2. O que são "sunspots", ou "animal spirits" na teoria económica moderna? Terão alguma relevância para explicar recessões ou "booms" económicos?

3. Considera razoável que "sunspots" persistam num processo inteiramente determinístico como o que acabámos de analizar (ou seja, $x_t = 10$, para $t \in (0, n-1)$). Justifique.

4. Suponha agora que x_t corresponde a um processo autorregressivo de 1^a ordem dado por

   $$x_t = \rho x_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad |\rho| < 1$$

   onde ε_t é uma variável aleatória com observações independentes e indenticamente distribuídas, e com média nula. Apresente a solução com expectativas racionais para o processo y_t com esta informação adicional.

5. Responda ao mesmo tipo de questão tal como em (3), mas agora sabendo que o processo que estamos a analisar é um processo estocástico dado em (4).

Solução E6.

Este exercício tem uma pequena variante relativamente aos exercícios anteriores, na sua questão (4).

1. Não fica determinado, fica indeterminado. Verifica-se a existência de um conjunto contínuo de soluções para o referido processo, como o resultado apenas de opiniões meramente subjectivas (animal spirits, sunspots, selfulfilling beliefs) dos agentes sobre a evolução da economia: ou seja de erros de previsão sobre o futuro.

Conhecidos os aspectos fundamentais da economia (x_t), qualquer valor para z_t (qualquer erro de previsão) leva a um valor diferente para o equilíbrio do processo.

2. Sunspots são o resultado de processos indeterminados. Qualquer opinião meramente subjectiva acaba por se sobrepor aos aspectos fundamentais do funcionamento da economia. Isto verifica-se, por exemplo, em bolhas especulativas, pânicos cambiais (ou outros, por exemplo "corrida aos bancos"), etc...

3. Num processo determinístico, onde não existem shocks sobre os processos económicos, não faz sentido existirem sunspots. A razão prende-se com o facto de os agentes económicos, conhecendo os "aspectos fundamentais" da economia, e não existindo shocks sobre a actividade económica, não cometem erros de previsão (não faz sentido cometer erros onde tudo é conhecido, onde não há incerteza). Por exemplo, se $x_t = 10$, para todo o t, não faz sentido cometer erros de previsão, observando nós o funcionamento do processo económico.

4. Sendo x_t um processo autorregressivo de 1^a ordem dado por

$$x_t = \rho x_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad |\rho| < 1$$

então o valor esperado de u_t virá

$$E_t u_t = \rho E_t u_{t-1} + E_t \varepsilon_t$$

de onde obtemos

$$E_t u_t = \rho E_t u_t + 0$$

ou seja, para todo o t, teremos

$$E_t u_t = \frac{0}{1-\rho} = 0$$

O que falta resolver na eq. (**??**) é o termo $\sum_{i=0}^{n-1} \left(a^i\right) x_{t-i-1}$. Assim

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(a^i\right) x_{t-i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (a)^i E_t x_{t-i-1} = \frac{1^o \ termo}{1 - raz\tilde{a}o} = \frac{0}{1-a} = 0$$

Portanto, inserindo este resultado de volta na equação (**??**), termos

$$y_t = \sum_{i=1}^{n-1} \left(a^i\right) z_{t-i} + 0$$

Temos aqui um processo económico **totalmente determinado por "sunspots"**.

Exercício 7 (objectivo: mostrar como funcionam as funções impulso resposta nestes processos)

Suponha que solução forward fornece o seguinte resultado para o conjunto de iterações de 1 até n :

$$y_t = a^n y_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \left(a^i\right) E_t x_{t+i} \quad , \quad |a| < 1$$

Suponha que os "economic fundamentals" (x_t) são representados por um processo autorregressivo de 1^a ordem dado por

$$x_t = \rho x_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \quad |\rho| < 1$$

onde ε_t é uma variável aleatória com observações independentes e indenticamente distribuídas e com média nula. Apresente a solução com expectativas racionais para o processo y_t com esta informação adicional, mas levando em consideração que $E_t x_{t+i}$ pode também ser dado pela expressão

$$E_t x_{t+i} = \rho^i x_t \tag{13}$$

(**Nota**: se $i \to \infty, \rho^i \to 0$, e $E_t x_{t+i} = 0$. Note que este resultado está em inteira conformidade com o resultado obtido na pergunta 4 do exercício 5. No entanto, como pode ser útil estudar a evolução de y_t no **curto prazo** (e não apenas relativamente ao seu equilíbrio de longo prazo, como foi feito na pergunta 4 do exercício 5), por isso, na solução considere o valor de $E_t x_{t+i}$ conforme equação (13), e não como $E_t x_{t+i} = 0$).

Solução E7.

Conforme "**Nota**" no enunciado do problema, se $i \to \infty, \rho^i \to 0$, e $E_t x_{t+i} = 0$. O que está em inteira conformidade com o resultado obtido na alínea 4 do exercício 5. No entanto, como pode ser útil estudar a evolução de y_t no curto prazo (e não apenas no seu equilíbrio de longo prazo), por isso, na solução considere o valor de $E_t x_{t+i}$ conforme equação (13), e não como $E_t x_{t+i} = 0$).

Assim, como $|a| < 1$, da equação (**??**) teremos

$$y_t = \sum_{i=0}^{n-1} \left(a^i\right) E_t x_{t+i}$$

Como, da equação (13) sabemos que

$$E_t x_{t+i} = \rho^i x_t$$

então a solução é imediata

$$\begin{aligned} y_t &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(a^i\right) \rho^i x_t \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (a\rho)^i x_t \end{aligned}$$

Agora é aplicar a receita da série geométrica

$$y_t = \sum_{i=0}^{n-1} (a\rho)^i x_t = \frac{1^o \ termo}{1 - razão} = \frac{1}{1 - a\rho} x_t$$

No longo prazo sabemos que x_t convergirá para zero, o mesmo se passando com y_t. Mas, e no curto prazo? O que acontece a y_t se x_t aumentar temporariamente em uma unidade? A resposta é imediata: aumenta $\frac{1}{1-a\rho}$. Como x_t volta depois gradualmente ao seu valor de equilíbrio de longo prazo ($\bar{x} = 0$), o mesmo acontecerá a y_t (convergindo para $\bar{y} = 0$). Temos aqui a exemplificação clara do que acontece neste processos com uma **função impulso resposta.**

Nota E7: Esta nota refere-se à informação dada no enunciado do presente exercício.

Como vimos o valor de $E_t x_{t+i}$ pode também ser escrito como

$$E_t x_{t+i} = \rho^i x_t$$

Porque razão? É simples, basta aplicar o operador de expectativas à equação

$$x_t = \rho x_{t-1} + \varepsilon_t$$

Assim,

$$E_t x_{t+1} = \rho E_t x_t + \underbrace{E_t \varepsilon_{t+1}}_{=0} \tag{14}$$

E

$$E_t x_{t+2} = \rho \left(E_t x_{t+1}\right) + \underbrace{E_t \varepsilon_{t+2}}_{=0} \tag{15}$$

Substituindo o resultado de (14) em (15), obtem-se

$$\begin{aligned} E_t x_{t+2} &= \rho(\rho E_t x_t) \\ &= \rho^2 E_t x_t \\ &= \rho^2 x_t \end{aligned}$$

Et voilá, o nosso resultado (não se esqueça que, logicamente, $E_t x_t = x_t$).

Exercício 8

Suponha um processo dinâmico expresso pela seguinte equação

$$\begin{aligned} \pi_t &= \beta E_t \pi_{t+1} + \lambda y_t \\ y_t &= E_t y_{t+1} - \frac{1}{\sigma}\left(i_t - E_t \pi_{t+1}\right) \\ i_t &= \bar{\imath} \end{aligned}$$

onde (β, λ, σ) são parâmetros, e i_t uma variável exógena. $E_t(\cdot)_{t+1}$ representa as expectativas formuladas sobre $(\cdot)_{t+1}$ com a informação disponível em t.

1. Reescreva o modelo na forma matricial, de forma a estudar a sua estabilidade.

2. Para o seguinte conjunto de valores para os parâmetros, diga se o equilíbrio deste modelo é determinado e estável. Justifique.

$$\beta = 0.8, \lambda = 0.6, \sigma = 2$$

Solução E8.

1. Note que o sistema pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} \beta E_t \pi_{t+1} + 0 E_t y_{t+1} &= \pi_t - \lambda y_t + 0 i_t \\ \frac{1}{\sigma} E_t \pi_{t+1} + 1 E_t y_{t+1} &= 0\pi_t + 1 y_t + \frac{1}{\sigma} i_t \end{aligned}$$

Na forma matricial, o sistema aparece como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ \frac{1}{\sigma} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t \pi_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pi_t \\ y_t \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix} i_t \end{aligned}$$

ou seja

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}_t \mathbf{z}_{t+1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{z}_t + \mathbf{C} \cdot \mathbf{v}_t \tag{16}$$

Esta é a forma mais útil para representar na forma matricial sistemas dinâmicos com variáveis forward looking (ou variáveis de control).

Convém agora passar a matriz $\mathbf{A}$ para o lado direito da equação (16). Para tal, termos de calcular a matriz inversa de $\mathbf{A}$ (ou seja, $\mathbf{A}^{-1}$), de forma a podermos escrever

$$\mathbf{E}_t \mathbf{z}_{t+1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \cdot \mathbf{z}_t + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \cdot \mathbf{v}_t$$

Consultando a **Nota** no final deste exercício (sobre como calcular a matriz inversa de uma matriz de 2×2), poderá confirmar que $\mathbf{A}^{-1}$ será dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ -\frac{1}{\beta\sigma} & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, o produto $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ será dado por

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & -\frac{\lambda}{\beta} \\ -\frac{1}{\beta\sigma} & \frac{\lambda+\beta\sigma}{\beta\sigma} \end{bmatrix}$$

enquanto que

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix}$$

O sistema pode agora ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} E_t \pi_{t+1} \\ E_t y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & -\frac{\lambda}{\beta} \\ -\frac{1}{\beta\sigma} & \frac{\lambda+\beta\sigma}{\beta\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_t \\ y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix} i_t$$

2. Com os seguintes valores para os parâmetros

$$\beta = 0.8 \ , \quad \lambda = 0.6 \ , \quad \sigma = 2$$

a matriz $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ assumirá os seguintes valores

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1.25 & -0.75 \\ -0.625 & 1.375 \end{bmatrix}$$

Para calcular os valores próprios (eigenvalues) da matriz $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ fazemos

$$\left[\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}_2\right] = \begin{bmatrix} 1.25 - \lambda & -0.75 \\ \\ -0.625 & 1.375 - \lambda \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{I}_2$ é a matriz identidade de ordem 2. Calculando o determinante de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_2)$ e igualando-o o zero virá

$$\det\left[(1.25 - \lambda)(1.375 - \lambda) - (-0.75 \times -0.625)\right] = 0$$

de onde obteremos

$$\begin{aligned} 1.25 - 1.25\lambda - 1.375\lambda + \lambda^2 &= 0 \\ &\text{ou seja} \\ \lambda^2 - 2.625\lambda + 1.25 &= 0 \end{aligned}$$

$\{[\lambda = 2.0]\,,\ [\lambda = 0.625\,]\}$

Desta expressão quadrática, poderemos obter dois valores para λ que staisfazem aquela igualdade, ou seja os valores dos tais **valores próprios**. A expressão geral da solução da expressão quadrática é

$$\begin{aligned} \lambda_1, \lambda_2 &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-2.625) \pm \sqrt{(-2.625)^2 - (4 \times 1 \times 1.25)}}{2 \times 1} \end{aligned}$$

Ou seja: $\{[\lambda_1 = 2.0]\,, [\lambda_2 = 0.625\,]\}$

Como neste modelo temos 2 variáveis "forward looking" e 0 variáveis pré-determinadas, para que o sistema tivesse um equilíbrio único e estável, deveríamos ter ambos os valores próprios maiores que 1 em módolo, $|\lambda_1, \lambda_2| > 1$. Como isso não se verifica, $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| < 1$, o sistema é indeterminado, já que uma das variávies tem um equilíbrio é estávele e único ($|\lambda_1| > 1$), enquanto que a outra só tem um equilíbrio estável se utilizarmos "backward ietration", mas neste caso existem infinitos equilíbrios ($|\lambda_2| < 1$).

Nota E8: Esta nota refere-se à ao método para como calcular a matriz inversa de uma matriz de 2×2), alínea (1) do presente exercício.

Suponha que tem a seguinte matriz 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

A matriz inversa de $\mathbf{A}$, é determinada da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Exercício 9

Considere os dados do exercício anterior, mas assuma agora que, em vez de ter $i_t = \bar{\imath}$, passa a considerar que

$$i_t = \theta \pi_t$$

Isto verifica-se em dois cenários possíveis:

$$\text{Cenário A}: \qquad \theta = 0.5$$

$$\text{Cenário B}: \qquad \theta = 1.1$$

O equilíbrio deste modelo é determinado e estável? Justifique em função do valor de θ em cada um dos cenários.

Solução E9.

Resolva o problema seguindo exactamente com os mesmos passos do exercício anterior. Basta para tal que substitua

$$i_t = \theta \pi_t$$

na segunda equação do modelo. As matrizes virão agora

$$A = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 1/\sigma & 1 \end{bmatrix}, \text{ inverse: } \; A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ -\frac{1}{\sigma\beta} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ \theta/\sigma & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \times B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ -\frac{1}{\sigma\beta} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ \theta/\sigma & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & -\frac{1}{\beta}\lambda \\ \frac{\theta}{\sigma} - \frac{1}{\sigma\beta} & \frac{1}{\sigma\beta}\lambda + 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \times B = \left[\begin{array}{cc} 1.25 & -0.75 \\ 0.5\theta - 0.625 & 1.375 \end{array} \right]$$

Cenário A: $\theta = 0.5$, implica que os valores próprios serão (usando Matlab e sendo D=$A^{-1} \times B$)

```
>> D=[1.25,-0.75;-0.375,1.375]
D =
1.2500 -0.7500
-0.3750 1.3750
>> eig(D)
ans =
0.7785
1.8465
```

Cenário B: $\theta = 1.1$, implica que os valores próprios serão

```
>> D=[1.25,-0.75;-0.075,1.375]
D =
1.2500 -0.7500
-0.0750 1.3750
>> eig(D)
ans =
1.0672
1.5578
```

Conclusões:

- *Cenário A*: nada muda quanto à estabilidade relativamente ao exercício anterior: um eigenvalue inferior a 1, outro superior a 1.
- *Cenário B*: o sistema agora fica estável, determinado pois já temos dois eigenvalues com valores superiores a 1.

Aqui está uma intuição muito útil:

> *se o Banco Central manipular a taxa de juro de forma suficientemente agressiva* ($\theta > 1$) *para fazer face aos shocks que afectam a economia, consegue controlar bem a economia; caso contrário, pequenos shocks provocam efeitos explosivos no funcionamento da mesma.*

É exactamente esta intuição que irá ser grandemente desenvolvida no core do Novo Modelo Keynesiano. Qual deverá ser o padrão de reacção do banco central aos shocks que afectam a economia?

Exercício 10. Tente resolver o problema usando o operador de expectativas.