Capítulo 3

O Modelo de Solow: Equilíbrio de Longo Prazo

Robert Solow, um economista do MIT (Massachusetts Institute of Technology) e prémio Nobel da Economia em 1987, apresentou em 1956 um modelo de crescimento económico de longo prazo que se tornou rapidamente num dos instrumentos teóricos e empíricos mais utilizados em toda a teoria económica desde então.[1] A explicação do crescimento contida neste modelo pretendia ser uma resposta à que tinha sido apresentada por Harrod e Domar nas décadas de 30 e 40 (a qual irá ser analisada num dos últimos capítulos), e tem como um dos objectivos fundamentais demonstrar que uma economia de mercado pode crescer no longo prazo de forma permanente, sustentada, e exibindo uma trajectória de equilíbrio relativamente *estável* mesmo sem a intervenção directa do governo na economia.

Contrariamente a este resultado fundamental do modelo de Solow, Harrod e Domar tinham desenvolvido um modelo de longo prazo no qual se reproduzia a perspectiva de Keynes sobre os desequilíbrios de curto prazo e a imperiosa necessidade duma intervenção estabilizadora por parte dos poderes públicos em termos de política económica. Para estes últimos autores, a economia comportava–se no longo prazo de uma forma extremamente instável (com desequilíbrios sucessivamente mais pronunciados), requerendo uma intervenção permanente do Governo para evitar que tais desequilíbrios levassem a uma crise económica de proporções incalculáveis.

Esta visão catastrófica do funcionamento dinâmico de uma economia de mercado parece ser facilmente questionável não só do ponto de vista

[1] Solow, R. M. (1956). "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, 70, 65–94.

teórico mas também do ponto de vista empírico,[2] e é integralmente rejeitada pelo modelo de Solow.

Este modelo pretende dar resposta às *três questões fundamentais* de qualquer análise dinâmica e que são: (i) existe equilíbrio de longo prazo? (ii) Se existir, o equilíbrio é estável ou instável? Após um choque a economia tem capacidade de regressar ao equilíbrio de longo prazo? (iii) Caso exista, este equilíbrio é único ou múltiplo? Como iremos mostrar neste capítulo, encontraremos uma resposta clara para cada uma destas questões no modelo de Solow, e como estamos a tratar de um modelo económico, o mesmo consegue dar ainda uma resposta a uma quarta questão: *O equilíbrio é óptimo do ponto de vista social?*

As respostas a estas quatro questões são derivadas de um modelo dinâmico relativamente simples e assente em seis hipóteses fundamentais:

(H1) A função de produção apresenta *rendimentos constantes à escala* relativamente a todos os factores acumuláveis ao longo do tempo, os quais são dois neste modelo: capital (K) e trabalho medido em termos de eficiência ($E \equiv LA$), sendo (L) serviços do trabalho e (A) o nível do conhecimento tecnológico;

(H2) Existem *rendimentos marginais decrescentes na acumulação de capital* (K);

(H3) A força de trabalho (L) cresce a uma *taxa constante, positiva e exógena*;

(H4) O conhecimento tecnológico (A) cresce também *a uma taxa constante, positiva e exógena.* Este factor é tido como um bem público, estando livremente disponível (e sem custos) em toda a economia e mesmo em todo o mundo;

(H5) A *taxa de poupança é constante*, positiva e exógena ($0 < s < 1$);

(H6) Os mercados do produto e dos factores produtivos *funcionam de forma perfeita.* Isto implica que não existem lucros extraordinários e os factores produtivos são remunerados de acordo com as suas respectivas produtividades marginais.

[2] Não existe qualquer indicação empírica de que as crises económicas se ampliam sem limites levando ao *big–bang* económico. Pelo contrário existe evidência significativa de que as crises económicas de curto prazo são pequenos desvios da economia da sua trajectória de crescimento de longo prazo. Estas crises têm um carácter temporário, e anulam–se em vez de se ampliarem. Portanto, é pouco provável que modelos que apresentam desequilíbrios crescentes possam representar com fidelidade o funcionamento de uma economia de mercado no seu funcionamento dinâmico de longo prazo.

3.1 Apresentação do Modelo

3.1.1 A função de produção

Admitimos uma economia que produz um bem homogéneo com três factores de produção: capital físico ou material (K); serviços do trabalho (L); e, conhecimento tecnológico (A). O trabalho é medido *em termos de eficiência*, o que significa que estamos a admitir que o conhecimento tecnológico é *labour-augmenting.*[3] A função de produção que representa a oferta ao longo do tempo neste tipo de processo tecnológico pode ser representada em termos genéricos por

$$Q_t = F\left(K_t, A_t L_t\right) \tag{3.1}$$

onde t representa o tempo. Relativamente à equação (3.1) são também assumidas as seguintes condições:

$$F'_K > 0,\ F''_K < 0,\ F'_{AL} > 0,\ F''_{AL} < 0$$

ou seja, a primeira derivada relativamente a cada um dos argumentos da função é positiva, enquanto que a segunda derivada é negativa. Estas condições garantem–nos que os *produtos marginais são decrescentes* relativamente a cada um dos factores produtivos (capital, K; e trabalho medido em termos de eficiência, $E = AL$). A utilização sucessiva de *mais uma unidade* de qualquer um destes factores produtivos permite obter aumentos no nível da produção, no entanto estes aumentos são sucessivamente cada vez menores. Em linguagem matemática, os aumentos positivos da produção resultantes de aumentos dos factores produtivos são expressos pelas derivadas de primeira ordem (são positivas); enquanto que o facto dos acréscimos serem cada vez mais pequenos são explicados pelas derivadas de segunda ordem serem negativas. Portanto, esta função de produção apresenta rendimentos marginais decrescentes em relação a cada um dos factores produtivos, o que implica a existência de rendimentos decrescentes na acumulação de capital.

A segunda característica fundamental da função de produção (3.1) é a *existência de rendimentos constantes à escala.* A produção apresenta este tipo de rendimentos à escala (função homogénea de grau 1) relativamente aos dois factores produtivos que constituem os seus argumentos — capital físico (K) e trabalho em termos de eficiência ($E = AL$) — sendo esta hipótese dada pela seguinte condição:

$$\forall \lambda > 0 : \lambda Q = F\left(\lambda K, \lambda AL\right)$$

[3] O conhecimento tecnológico é *labour–augmenting* se este afectar *directamente* a produtividade do trabalho, não a produtividade do capital.

Isto significa que, por exemplo, duplicar as quantidades de capital e de trabalho (em termos eficientes) aplicados na produção provoca uma duplicação da quantidade produzida.

De forma a simplificar a análise do comportamento do modelo no longo prazo, vamos trabalhar com a função de produção (3.1) reescrita *em termos intensivos*, para tal dividindo ambos os termos da mesma por AL, o que significa que qualquer variável será dada não em termos do seu valor absoluto mas sim por *unidade de trabalho eficiente* (ou, simplesmente*, em termos de eficiência).* Este procedimento apresenta ainda uma outra vantagem, a qual consiste em permitir a comparação de diferentes economias, independentemente dos seus valores absolutos em termos do produto, população, dimensão geográfica, etc.. Dividindo a equação (3.1) por AL iremos obter

$$\frac{Q_t}{A_tL_t} = F\left(\frac{K_t}{A_tL_t}, \frac{A_tL_t}{A_tL_t}\right)$$

ou seja, $q_t = f\left(k_t, 1\right)$, com $q_t \equiv \frac{Q_t}{A_tL_t}$ e $k_t \equiv \frac{K_t}{A_tL_t}$ e tendo ainda $f'(k_t) > 0$ e $f"(k_t) < 0$. Como a constante 1 não varia ao longo do tempo, a mesma em nada afecta os resultados e podemos escrever

$$q_t = f\left(k_t\right) \tag{3.2}$$

sendo q_t o output medido em termos de eficiência e k_t o stock de capital medido também em termos de eficiência ou em valores intensivos.

Da função de produção em termos intensivos (3.2) podemos também obter o valor do *produto marginal do capital* medido em termos de eficiência. Este produto marginal dá–nos a *variação* no produto em termos de eficiência que se obtém quando aumentamos em *uma unidade* o capital por unidade de trabalho eficiente. Esta informação é dada pela derivada da função de produção (3.2) relativamente a k, a qual em termos gráficos corresponde à tangente a cada um dos pontos da função de produção (*Figura 3.1*).

3.1.2 Exemplo de uma função de produção: Cobb–Douglas

Uma função de produção que cobre as características que acabámos de referir é uma função denominada por Cobb–Douglas, a qual será talvez a função de produção mais utilizada na teoria económica:

$$Q_t = K_t^{\alpha}(A_tL_t)^{1-\alpha} \tag{3.3}$$

sendo $0 < \alpha < 1$. Se dividirmos ambos os lados da mesma por A_tL_t, podemos apresentá–la na forma intensiva, ou seja

$$q_t = f(k) = k_t^{\alpha}$$

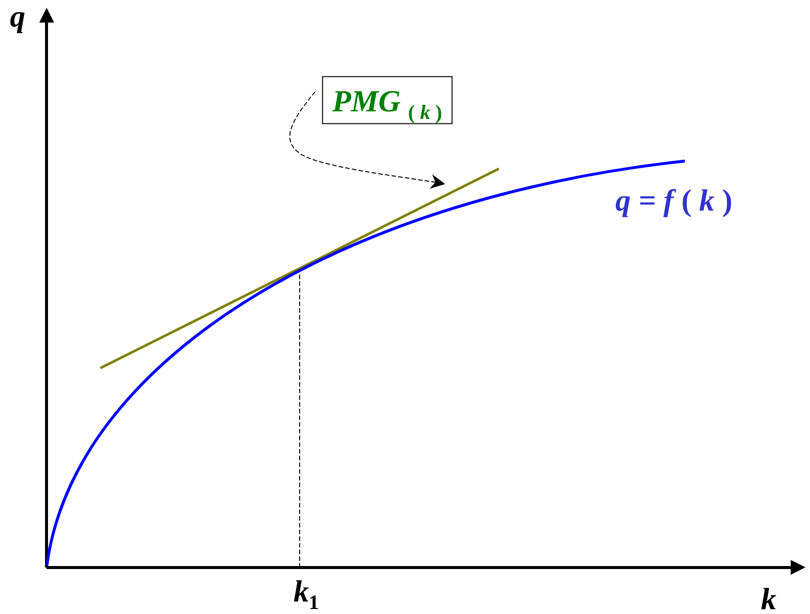

Figura 3.1: A FUNÇÃO DE PRODUÇÃO EM TERMOS INTENSIVOS

Derivando a expressão da função de produção (3.3) em ordem a K_t, obtemos o valor do produto marginal do capital, o qual é denominado por PMG_K. Em termos intensivos este valor é dado pela expressão

$$PMG_K \equiv \partial Q_t/\partial K_t = \alpha k_t^{\alpha-1}$$

Note que apesar de não ser necessário apresentar nesta secção o conceito de produto marginal do factor trabalho (PMG_L), o mesmo pode ser também expresso em termos do stock de capital em termos intensivos. Derivando a expressão da função de produção em valor absoluto em ordem a L_t, obtemos o valor deste produto marginal, o qual é expresso em termos intensivos por

$$PMG_L \equiv \partial Q_t/\partial L_t = (1-\alpha)A_t k_t^{\alpha}.$$

3.1.3 O comportamento da procura de bens e serviços

A afectação do rendimento na procura de bens e serviços (Q_t) nesta economia é dada pela equação

$$Q_t \equiv C_t + S_t \tag{3.4}$$

onde C_t é o nível do consumo e S_t o nível da poupança. Esta equação básica diz–nos simplesmente que a parte do rendimento que não é consumida é poupada. Uma outra equação que é fundamental no lado da procura, e da qual dependem muitos dos resultados deste modelo de crescimento económico, resulta da hipótese da poupança ser *automaticamente* canalizada para investimento, independentemente do nível da actividade económica, do nível da poupança, do nível do investimento, ou de qualquer outra variável económica. Isto é, em qualquer ano t a seguinte equação verificar–se–á

$$I_t \equiv S_t \tag{3.5}$$

Note que neste modelo, e contrariamente aos modelos de curto prazo que analisámos nos capítulos anteriores, não temos uma equação *independente* para o investimento. Isto é, uma vez definido o comportamento da função consumo temos definida a função investimento, já que todo o rendimento que não é consumido é poupado (por definição), e todo o rendimento poupado é automaticamente canalizado para investimento por *hipótese* imposta ao próprio modelo.[4]

A função consumo que consideramos no modelo é uma função convencional, isto é o consumo depende positivamente do nível do rendimento ou do produto

$$C_t = b \cdot Q_t = (1 - s) \cdot Q_t \tag{3.6}$$

sendo b a propensão marginal ao consumo e s a propensão marginal a poupar, $0 < b < 1$, e $b + s = 1$.

Utilizando as equações (3.4) e (3.5) podemos obter a seguinte equação

$$Q_t \equiv C_t + I_t \tag{3.7}$$

e usando esta equação juntamente com a equação (3.6) obter–se–á a função investimento (bruto) dependente do nível da poupança

$$I_t = s \cdot Q_t \tag{3.8}$$

O investimento bruto é, portanto, proporcional ao produto (também em termos brutos) sendo a sua parcela determinada pela taxa de poupança s.

[4] Por exemplo, nas análises macroeconómicas de curto prazo assume-se normalmente que o investimento depende negativamente da taxa de juro, e positivamente da variação da procura agregada de bens e serviços. Isto é, o investimento é independente do consumo e, consequentemente, independente da poupança. Neste caso, o nível do investimento pode facilmente ser diferente do nível da poupança num determinado ano ou mesmo em vários anos. Contrariamente a esta situação, no modelo que estamos a considerar neste capítulo assume–se a hipótese do investimento ser automaticamente igual à poupança, e, portanto, ser *dependente* do comportamento desta.

Este resultado demonstra claramente que não temos neste modelo uma função de investimento independente.

Podemos também expressar as variáveis acima apresentadas mas em termos intensivos, isto é, dividindo as equações acima por AL. A procura por unidade de trabalho eficiente ($q_t \equiv Q_t/A_tL_t$) virá:

$$q_t = c_t + i_t \tag{3.9}$$

onde c_t é o consumo por trabalhador eficiente (C_t/A_tL_t) e i_t é o investimento por trabalhador eficiente (I_t/A_tL_t). Por sua vez, o consumo em termos de eficiência será dado pela expressão

$$c_t = (1 - s)q_t \tag{3.10}$$

Como $q_t = f\left(k_t\right)$, vide equação (3.2), então $c_t = (1-s)f\left(k_t\right)$. No que diz respeito ao investimento, em termos absolutos este é dado por $I_t = sQ_t$. Procedendo à divisão desta equação também por A_tL_t, obtém–se

$$i_t = s \cdot f(k_t) \tag{3.11}$$

Podemos representar graficamente o comportamento das três principais variáveis do lado da procura (q, c, i) em virtude de todas elas poderem ser expressas em função do nível do capital em termos de eficiência. Na *Figura 3.2* apresenta–se a distribuição da produção entre investimento e consumo, sintetizada pelo conjunto de equações que se encontram na caixa seguinte:

$q_t = f\left(k_t\right)$	,	produto
$c_t = (1 - s) \cdot f\left(k_t\right)$	,	consumo
$i_t = s \cdot f(k_t)$	,	investimento

3.1.4 A evolução dos factores produtivos no tempo

Os níveis iniciais de capital, trabalho e conhecimento tecnológico são dados e são positivos

$$K_0 > 0,\ L_0 > 0,\ A_0 > 0$$

É também assumido neste modelo que destes três factores produtivos, dois deles, o trabalho e o conhecimento tecnológico crescem a taxas

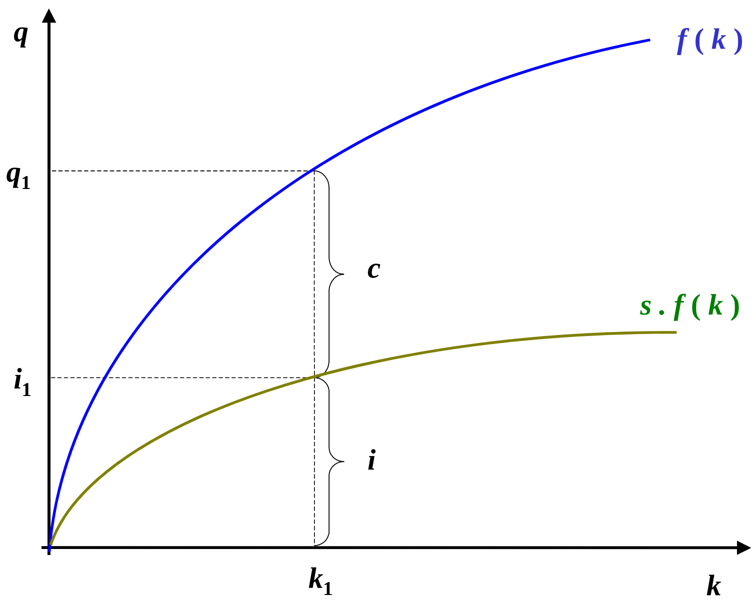

Figura 3.2: A REPARTIÇÃO DA PRODUÇÃO ENTRE CONSUMO E INVESTIMENTO.

constantes e exógenas dadas, respectivamente, por n e m. Estas taxas de crescimento podem ser escritas na forma matemática através das seguintes equações:

$$\dot{L}_t = nL_t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\dot{L}_t}{L_t} = n \tag{3.12}$$

$$\dot{A}_t = mA_t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\dot{A}_t}{A_t} = m \tag{3.13}$$

onde o ponto $(\cdot)$ por cima de uma variável é usado como forma de simplificar a simbologia e representa a derivada da variável relativamente ao tempo, ou seja, no caso acima teremos $\dot{A}_t \equiv dA_t/dt$.

Por sua vez, o comportamento dinâmico do stock de capital físico (K_t) depende de duas forças: do investimento bruto e da amortização ou depreciação física do capital. Estas duas forças têm o seguinte impacto sobre o stock de capital:

- o investimento bruto (I_t), no caso de ser positivo faz aumentar o nível de K_t, e no caso de ser negativo provoca uma diminuição neste stock;

- a depreciação física do capital, sendo a taxa de depreciação dada pela constante δ cujo intervalo de variação é $0 < \delta < 1$, provoca uma redução no nível de K_t.

Utilizando esta informação, a variação do capital em termos absolutos em cada ano ou período de tempo ($\dot{K}_t$) pode ser expressa em termos algébricos pela seguinte equação:

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t \quad , \quad 0 < \delta < 1 \tag{3.14}$$

3.2 O Equilíbrio de Longo Prazo

Como vimos no primeiro capítulo, o equilíbrio de longo prazo — ou simplesmente, ELP — pode ser definido como *o estado* para o qual cada uma das variáveis endógenas tenderá durante o processo de acumulação de capital ano após ano, num longo período de tempo. Quando a economia alcançar este estado, as variáveis endógenas passarão a crescer a uma taxa constante, a qual poderá ser positiva ou nula.

A obtenção do equilíbrio de longo prazo pode ser efectuada através de dois métodos: em termos gráficos, e em termos algébricos. Vamos começar com a análise algébrica. Depois passamos para a análise gráfica onde faremos também o estudo da estabilidade do modelo.

3.2.1 A dinâmica do modelo: análise algébrica

As principais equações de comportamento do nosso modelo são as seguintes:

$Q_t = F(K_t, L_t A_t)$	,	a função de produção
$I_t = sQ_t$	,	o investimento
$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t$	,	a variação do capital
$\dot{L}_t = nL_t \Leftrightarrow \frac{\dot{L}_t}{L_t} = n$	,	a variação do trabalho
$\dot{A}_t = mA_t \Leftrightarrow \frac{\dot{A}_t}{A_t} = m$	,	a variação do conhecimento tecnológico

Estas cinco equações resumem o modelo de crescimento económico desenvolvido por Solow.[5] Conforme referimos no início deste capítulo, sendo este um modelo económico dinâmico, a análise do seu comportamento no longo prazo implica dar resposta ao seguinte conjunto de questões fundamentais: (i) esta economia terá um equilíbrio no longo prazo; (ii) se este equilíbrio existir, será estável ou instável?; (iii) será único ou existirão vários equilíbrios de longo prazo?; (iv) e será um equilíbrio que corresponde ao óptimo do ponto de vista social, ou o governo deve intervir sobre esse equilíbrio no sentido de melhorar o bem–estar social?

A nossa preocupação imediata consiste em tentar encontrar uma resposta para a primeira interrogação. Para tal iremos aplicar um artifício que consiste em utilizar todas as variáveis na sua forma intensiva (isto é, em termos de eficiência), no sentido de reduzir o modelo a uma única equação de movimento. Este procedimento é extremamente útil do ponto de vista da obtenção de uma solução do mesmo mas *repare que isto é um mero truque analítico*, em nada alterando a essência do modelo como irá facilmente perceber. Podemos estudar o comportamento do modelo utilizando, por exemplo, a variável k_t cuja definição vimos ser

$$k_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t} = \frac{K_t}{E_t} \tag{3.15}$$

com $E_t \equiv A_t L_t$.

Como é que esta variável se vai comportar ao longo do tempo? Isto é, qual será o valor da expressão dk/dt, ou simplesmente, $\dot{k}_t$. A variação de k relativamente ao tempo é dada pela sua derivada total relativamente a t. Utilizando a definição de derivada total teremos (vide *Figura 3.3*)

$$\dot{k}_t = \frac{\partial k_t}{\partial K_t}\frac{dK_t}{dt} + \frac{\partial k_t}{\partial E_t}\frac{dE_t}{dt} \tag{3.16}$$

Calculando as derivadas parciais da equação (3.15), sendo estas dadas por $\partial k_t/\partial K_t = 1/E_t$ e $\partial k_t/\partial E_t = -\left(K_t/E_t^2\right)$, e utilizando as definições de $dK_t/dt \equiv \dot{K}_t$ e $dE_t/dt \equiv \dot{E}_t$, podemos então chegar a uma nova expressão para $\dot{k}_t$ [6]

[5] Existem ainda duas outras equações que fazem parte do modelo mas que não estão na caixa acima. Estas são o consumo, $C_t = b \cdot Q_t$, e a igualdade automática entre a poupança e o investimento $I_t = S_t$. No entanto estas duas equações estão presentes na função investimento acima apresentada. Portanto, o modelo pode de facto ser resumido pelas cinco equações acima referidas.

[6] De forma a simplicar a exposição vamos omitir o índice do tempo (t) nas expressões seguintes. Somente em situações em que seja mesmo bastante vantajoso, este índice será novamente introduzido nas equações. *No entanto, deve ter bem presente que este modelo é um modelo dinâmico, e, portanto todas as suas variáveis evoluem ao longo do tempo, isto é, estão expressas em termos de t.*

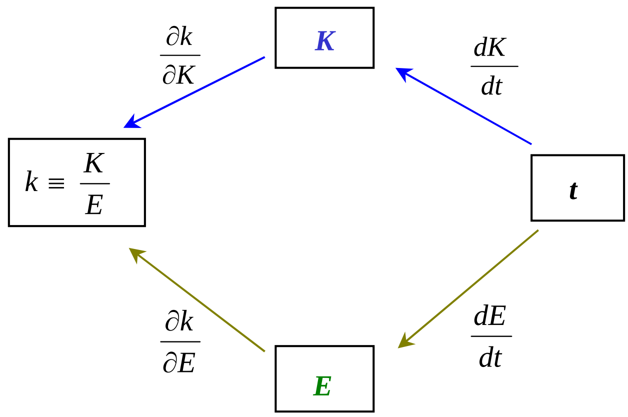

Figura 3.3: ESQUEMA GRÁFICO DA DERIVADA TOTAL DE k_t EM ORDEM AO TEMPO (dk_t/dt).

$$\dot{k} = \frac{1}{E}\dot{K} + \left(-\frac{K}{E^2}\dot{E}\right) \tag{3.17}$$

A equação (3.17) pode ser reescrita como

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{E} - \frac{K}{E}\frac{\dot{E}}{E} \tag{3.18}$$

Sendo a taxa de crescimento de E, por definição, dada por $\dot{E}/E \equiv g_E$, a última expressão fica

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{E} - \frac{K}{E}g_E \tag{3.19}$$

Nesta equação temos a variação do capital por unidade de tempo $(\dot{K})$, no entanto como vimos atrás (vide equação 3.14) esta variação é dada por $\dot{K} = I - \delta K$. Sabendo também que $E \equiv AL$ e que, portanto, a taxa de crescimento de E é a soma das taxas de crescimento do trabalho e do progresso tecnológico $g_E = g_L + g_A = n + m$, a expressão (3.19) transforma-se em

$$\dot{k} = \frac{I - \delta K}{E} - k\,(n+m) \tag{3.20}$$

Por sua vez o investimento é proporcional ao produto, num montante dado pela taxa de poupança, isto é, $I = sQ$, o que nos permite escrever

$$\dot{k} = \frac{sQ}{E} - \delta\frac{K}{E} - k\,(n+m) \tag{3.21}$$

e como $\frac{Q_t}{E_t} \equiv q_t$ e $\frac{K_t}{E_t} \equiv k_t$, a expressão anterior passa a ser dada por

$$\dot{k} = sq - \delta k - k\,(n+m) \tag{3.22}$$

No entanto, a produção em termos intensivos é uma função do stock de capital em termos intensivos, isto é, $q = f(k)$. Assim pode-se finalmente escrever

$$\dot{k} = s \cdot f(k) - (\delta + n + m)\,k \tag{3.23}$$

A equação (3.23) *é a equação fundamental do modelo de Solow.* A partir da equação fundamental podemos determinar o equilíbrio de longo prazo desta economia, isto é, o valor de k_t para o qual a economia converge no longo prazo, se tudo o resto permanecer constante. Vamos designar este nível por k^*, o qual pode ser facilmente obtido igualando a zero a equação (3.23). Note que

$$\boxed{\begin{array}{lll} \dot{k}_t > 0 & \Rightarrow & k_t \text{ está a aumentar} \\ \dot{k}_t < 0 & \Rightarrow & k_t \text{ está a diminuir} \\ \dot{k}_t = 0 & \Rightarrow & k_t \text{ permanece constante} \end{array}}$$

Portanto, é fácil constatar que k_t atingirá um ponto de equilíbrio de longo prazo (isto é, um ponto a partir do qual o valor de k_t não varia, permanece constante) se $\dot{k}_t = 0$. Dito de outro modo, o equilíbrio de longo prazo é alcançado assim que se atinge o nível de capital por unidade de trabalho eficiente (k^*) para o qual o stock de capital por unidade de trabalho eficiente não se altera. Igualando a zero a equação (3.23) obtém–se

$$s \cdot f(k^*) = (\delta + n + m)k^* \tag{3.24}$$

onde k^* representa o stock de capital por unidade de trabalho eficiente que nos dá o equilíbrio de longo prazo do sistema dinâmico estudado. Portanto, no equilíbrio de longo prazo, o investimento em termos absolutos serve apenas para compensar a depreciação do capital em termos absolutos e para repor (ou manter constante) o nível do capital por unidade de trabalho eficiente.

3.2.2 A dinâmica do modelo: análise gráfica

O equilíbrio de longo prazo do modelo pode também ser analisado em termos gráficos. Graficamente temos que representar as duas componentes da equação fundamental do modelo — $\dot{k}_t = sf(k) - (\delta + n + m)\,k$ —

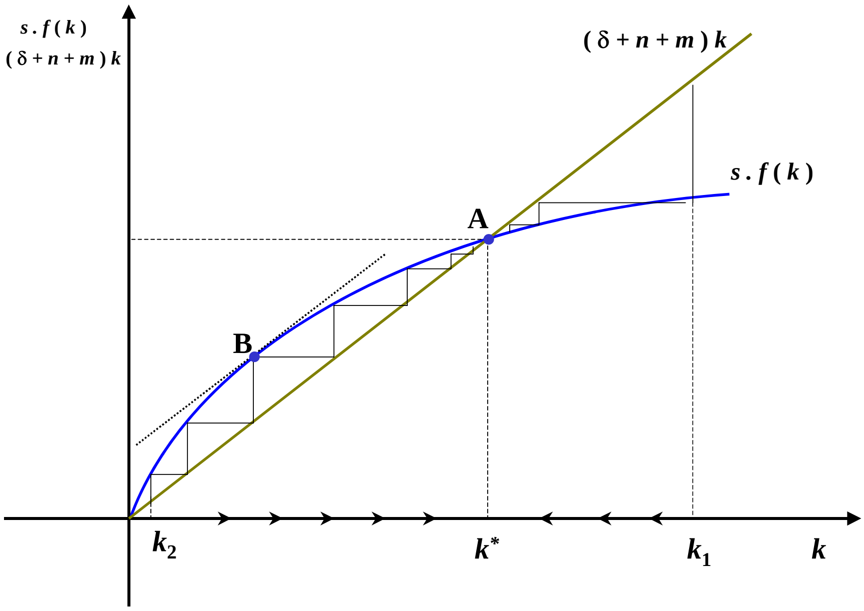

Figura 3.4: O EQUILÍBRIO DE LONGO PRAZO.

sendo $s \cdot f(k^*)$ o investimento em termos de eficiência e $(\delta + n + m) k^*$ a necessidade de reposição do capital. Estas duas funções dependem ambas apenas do nível de k^* e o equilíbrio entre elas é apresentado no ponto A na *Figura 3.4.*

Queremos também demonstrar que o equilíbrio de longo prazo *existe e é único*, isto é, que existe um e só um nível de k^* para o qual a economia converge no longo prazo, independentemente do seu nível inicial de capital em termos de eficiência. Vamos utilizar a *Figura 3.4* para responder a esta questão.

Níveis de capital por unidade de trabalho eficiente inferiores ao nível de equilíbrio de longo prazo (por exemplo, $k_t = k_2$), representam situações em que o investimento é superior à necessidade de reposição do capital por unidade de trabalho eficiente. Como para k_2 a função $s \cdot f(k_2)$ estará acima da recta $(\delta + n + m) k_2$, então $\dot{k}_2 > 0$, e, portanto, estaremos numa situação em que o stock de capital em termos de eficiência estará a crescer ao longo do tempo. Esta acumulação de capital vai assumindo montantes cada vez menores à medida que nos aproximamos do stock de equilíbrio, k^*, já que a diferença entre as duas funções se vai reduzindo progressivamente ano após ano.

Por outro lado, níveis de capital por unidade de trabalho eficiente superiores ao nível de equilíbrio de longo prazo (por exemplo, $k_t = k_1$),

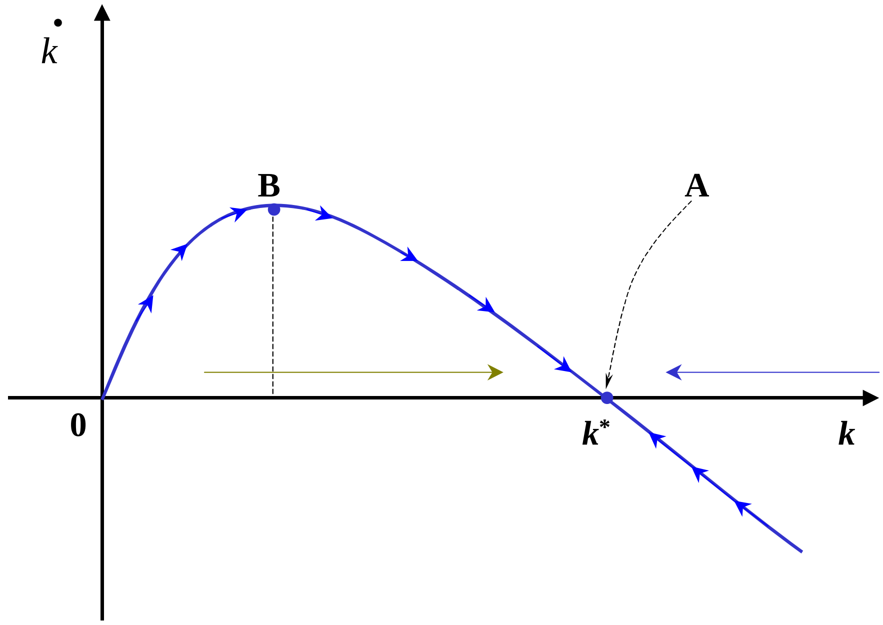

Figura 3.5: DIAGRAMA OU LINHA DE FASE.

representam situações em que a necessidade de reposição do capital é superior ao montante de investimento — a recta $(\delta + n + m)\,k$ está acima da função $s \cdot f\,(k)$ — o que significa que o stock de capital por unidade de trabalho eficiente está a decrescer isto é, $\dot{k}_1 < 0$. Estes decréscimos vão-se tornando cada vez menores à medida que o stock de capital por unidade de trabalho eficiente se aproxima de k^* e anulam-se no ponto A.

A *Figura 3.4* permite–nos concluir que, independentemente do ponto de partida, a economia tenderá para o nível de capital por unidade de trabalho eficiente de equilíbrio de longo prazo (k^*). Portanto, este *equilíbrio é único*, já que apenas existe um nível de $k_t = k^*$. Desta forma podemos a partir da análise gráfica dar resposta à primeira das três questões colocadas: "existe equilíbrio de longo prazo e é único?". A resposta é afirmativa.

No entanto, é também necessário saber se este equilíbrio, apesar de existir e ser único, *é estável ou instável*. Isto é, se a economia sofrer um choque de natureza temporária, por exemplo, uma catástrofe natural ou uma guerra, voltará ao seu equilíbrio de longo prazo inicial? Vamos utilizar a *Figura 3.4* para responder a esta questão. Suponha que a economia se encontrava no ponto A, e que a mesma sofre um enorme sismo levando a uma redução drástica do montante do stock de capital por trabalhador eficiente. Após o terramoto o nível de k passa de k^* para k_2. Como certamente já se apercebeu, depois de termos percorrido esta figura antes, como os efeitos do terramoto têm uma duração temporária, a economia irá convergir para o mesmo equilíbrio de longo prazo que tinha antes do referido terramoto. Note que isto é válido também para o caso oposto, isto é, se a economia recebesse uma benesse da natureza ou da comunidade internacional, passando de k^* para k_1. Também aqui, a economia voltaria ao fim de alguns anos ao seu equilíbrio de longo prazo inicial.

A *Figura 3.5* permite visualizar a relação entre $\dot{k}$ e k ao longo do tempo (note que a primeira variável é a *variação de* k por período de tempo, e a segunda o *valor de* k em cada período). Este tipo de gráfico é normalmente designado por *diagrama ou linha de fase* em virtude de mostrar as diferentes fases pelas quais a variável k passa ao longo do tempo. Neste caso concreto, a variável k só tem duas fases: uma em que $\dot{k} > 0$, e portanto k vai aumentado ao longo do tempo; e uma outra em que $\dot{k} < 0$, e, consequentemente, k vai decrescendo com o tempo. Note que esta figura pode ser directamente obtida a partir da figura anterior (*Figura 3.4*). Como a equação fundamental do modelo de Solow é dada por $\dot{k} = s \cdot f(k) - (\delta + n + m)\,k$, $\dot{k}$ é positivo/negativo e k aumenta/diminui dependendo da relação entre as suas duas componentes: $s \cdot f(k)$ e $(\delta + n + m)\,k$. Como para valores muito baixos de k (perto de zero), a diferença entre $s \cdot f(k) - (\delta + n + m)\,k$ vai sendo cada vez maior à medida que k aumenta, portanto $\dot{k}$ é não somente positivo mas vai também aumentando até um determinado momento, a partir do qual a situação se inverte. A partir do ponto B na *Figura 3.4*, a distância entre $s \cdot f(k)$ e $(\delta + n + m)\,k$ vai sendo agora cada vez menor até se atingir o ponto A. Portanto, entre estes dois pontos $\dot{k}$ é ainda positivo, mas cada vez mais próximo de zero, e, consequentemente, k vai crescendo mas cada vez a taxas mais pequenas até se estabilizar no ponto A. Do ponto A para a direita este processo passa para uma *fase* diferente. Para valores de k maiores que k^*, $\dot{k}$ é negativo e portanto k vai constantemente diminuindo até atingir o seu equilíbrio de longo prazo que é dado por k^*. No diagrama de fase, podemos vizualisar a evolução da variável k período após período (ou ano após ano) no seu trajecto de um ponto de partida inicial até ao seu equilíbrio (se este existir) de longo prazo. Obviamente que o diagrama de fase confirma também que o equilíbrio no modelo de Solow existe, é único, e é estável.

Após esta análise gráfica, podemos já apresentar as duas primeiras conclusões do modelo de Solow:

Conclusão 3.1 *O equilíbrio de longo prazo no modelo de Solow existe e é único.*

Conclusão 3.2 *O equilíbrio de longo prazo do modelo é estável, já que* *independentemente do ponto de partida, a economia converge para uma trajectória de crescimento equilibrado.*

3.2.3 Caracterização do crescimento no ELP

Outra questão que se coloca é como o modelo se comporta quando $k = k^*$? Isto é, quando a economia entra na trajectória de equilíbrio de longo prazo, o que acontece às principais variáveis endógenas? Como se comportam Q_t, C_t, K_t, Q_t/L_t, etc., no equilíbrio de longo prazo?

Por definição, como no equilíbrio de longo de prazo $\dot{k}_t = 0$, então a taxa de crescimento do capital por unidade de trabalho eficiente corresponde a $g_k = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{0}{k} = 0$. Portanto

$$\boxed{g_k = 0}$$

A partir daqui, podem–se deduzir as taxas de crescimento das restantes variáveis já que estas também se encontrarão na trajectória de equilíbrio de longo prazo, isto é, na trajectória onde se verifica $\dot{k}_t = 0$. A taxa de crescimento do capital em termos absolutos, e recordando que por definição $K \equiv kE$, será necessariamente a soma da taxa de crescimento do capital por unidade de trabalho eficiente, g_k, (que é nula) e da taxa de crescimento do trabalho em termos eficientes, g_E. Portanto, como esta última é igual à soma da taxa de crescimento do trabalho e da taxa de crescimento do progresso tecnológico, isto é, $g_E = n + m$, teremos, $g_K = g_k + g_E = 0 + (n + m)$, daqui resultando

$$\boxed{g_K = n + m}$$

Como a função de produção é homogénea de grau um relativamente a K e AL, o produto terá forçosamente de crescer à mesma taxa destes dois factores produtivos. Estas taxas de crescimento são dadas por $g_K = g_E = n + m$ e$= n + m$. Assim, teremos:[7]

$$\boxed{g_Q = n + m}$$

Como $C_t = b \cdot Q_t$, sendo b uma constante, então $g_C = g_Q = n + m$. Portanto, como as variáveis expressas em termos de valores absolutos crescem todas à mesma taxa, podemos definir g como sendo a taxa de crescimento de longo prazo da economia, em que $g = g_K = g_C = g_Q = n + m$.

[7] Este resultado pode ser facilmente demonstrado se utilizarmos uma função de produção tipo Cobb-Douglas: $Q_t = K_t^{\alpha} (A_t L_t)^{1-\alpha}$. Portanto, $g_Q = \alpha g_K + (1 - \alpha)(g_A + g_L)$
$= \alpha (n + m) + (1 - \alpha)(n + m) = n + m.$

Por outro lado, sabemos que as taxas de crescimento da população e do conhecimento tecnológico são (por hipótese do modelo) exógenas e constantes:

$$\boxed{g_L = n}$$

$$\boxed{g_A = m}$$

Falta-nos apenas conhecer as taxas de crescimento do capital e do produto por trabalhador, ou seja, *em termos per capita*. Estas serão iguais à taxa de crescimento do capital ou do produto (conforme se trate de uma ou de outra) à qual se subtrai a taxa de crescimento da população

$$g_{K/L} = g_K - g_L = n + m - n = m$$

$$g_{Q/L} = g_Q - g_L = n + m - n = m$$

Podemos retirar daqui mais três conclusões relativamente ao modelo de Solow (vide Caixa seguinte):

Conclusão 3.3 *No equilíbrio de longo prazo, cada variável cresce a uma taxa constante.*

Conclusão 3.4 *No equilíbrio de longo prazo, o produto per capita e o capital per capita crescem apenas se existir crescimento no nível do conhecimento tecnológico, isto é, se $m > 0$. Portanto, a melhoria das condições médias de vida depende inteiramente da taxa de crescimento da tecnologia.*

Conclusão 3.5 *O crescimento económico não depende de qualquer força económica de natureza endógena. Como a taxa de crescimento da produção é igual a $n + m$, e estas duas taxas são assumidas como exógenas pelo modelo, então a política económica pouco ou nada pode fazer no sentido de fomentar o crescimento económico no longo prazo.*

Taxas de crescimento no equilíbrio de longo prazo

variáveis exógenas		variáveis endógenas		
g_L = n	g_A = m	$g_k = g_q$ = 0	$g_{K/L} = g_{Q/L}$ = m	$g_K = g_Q$ = $n + m$

Deve notar que, apesar da política económica não poder afectar a taxa de crescimento económico no longo prazo, isso não significa que não exista um papel para a intervenção das instituições públicas na economia no longo prazo. Se o Governo for capaz de influenciar a determinação do nível da taxa de poupança poderá levar a economia para uma trajectória de longo prazo em que o bem–estar social é maximizado. Sem esta intervenção não existem garantias que a taxa de poupança que os agentes económicos decidem manter seja de facto aquela que maximiza o bem–estar social no longo prazo. Este problema está relacionado com aquilo que é normalmente designado como a "regra de ouro na acumulação de capital", a qual irá ser discutida de seguida.

3.3 A Regra de Ouro da Acumulação de Capital

3.3.1 Definição da regra de ouro

Uma outra questão a que o modelo de Solow permite responder é qual o montante de capital que é óptimo do ponto de vista do bem–estar social numa economia. Se a economia, através dos seus decisores de política económica, poder influenciar a determinação do nível de capital correspondente ao equilíbrio de longo prazo, tentará escolher aquele que maximiza o bem-estar. A maximização do bem–estar social de equilíbrio de longo prazo é obtida quando o nível do consumo por trabalhador eficiente é máximo. O nível máximo de consumo que os agentes económicos podem obter no longo prazo é designado por *"regra dourada da acumulação de capital"*.

A regra de ouro da acumulação de capital consiste em determinar o valor da taxa de poupança (a determinante do nível de investimento e, portanto, do nível de consumo) que conduz a uma situação de equilíbrio estacionário em que o consumo *per capita* é máximo. De entre os diferentes níveis de capital por unidade de trabalho eficiente que representam os equilíbrios j de longo prazo (k_j^*) possíveis — note-se que variando a taxa de poupança, s, variam os k_j^* — há que escolher aquele que maximiza o consumo por unidade de trabalho eficiente. Sendo $c = q - i$, e como $q = f(k)$ e $i = s \cdot f(k)$, podemos escrever $c = f(k) - s \cdot f(k)$. Portanto, no equilíbrio de longo prazo, esta expressão virá

$$c^* = f(k^*) - s \cdot f(k^*) \tag{3.25}$$

Mas como sabemos que no equilíbrio de longo prazo temos $s \cdot f(k^*) = (\delta + n + m) k^*$, então podemos apresentar a equação (3.25) como

$$c^* = f(k^*) - (\delta + n + m) k^* \tag{3.26}$$

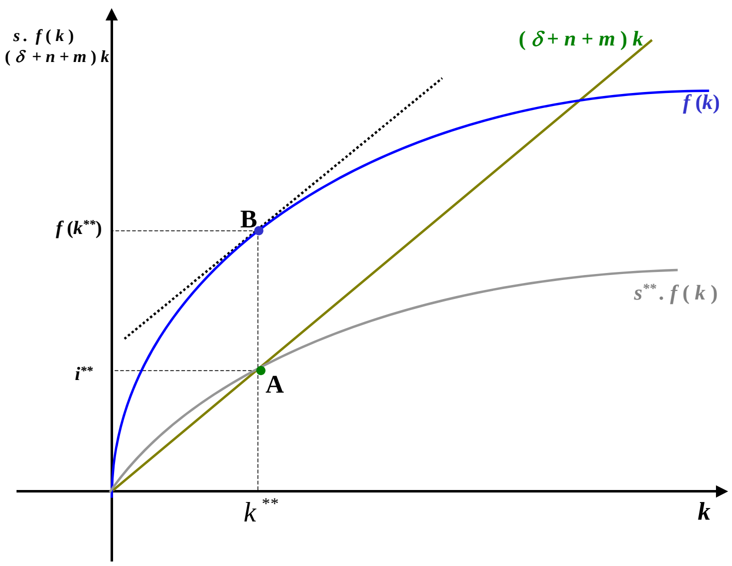

Figura 3.6: A REGRA DOURADA DA ACUMULAÇÃO DE CAPITAL.

Para maximizar o consumo per capita devemos maximizar a função (3.26), o que pode ser feito calculando a sua derivada em ordem a k^* e igualando–a a zero. O resultado será dado por

$$f'(k) = (\delta + n + m) \tag{3.27}$$

Como $f'(k)$ é a produtividade marginal do capital, PMG_k, assim o que a regra de ouro impõe é que a produtividade marginal do capital, líquida das taxas de depreciação do capital, de crescimento populacional e de crescimento do progresso tecnológico, seja nula:

$$PMG_{(k)} = \delta + n + m \tag{3.28}$$

Graficamente, o consumo atinge o seu máximo no ponto em que a inclinação da tangente à função de produção seja igual à inclinação da função $(\delta + n + m)\,k$. Desta forma, maximiza–se a distância entre a função de produção $f(k)$ e a recta que nos dá a necessidade de reposição do capital $(\delta + n + m)\,k$, tal como está representado na *Figura 3.6*. Note que a linha picotada é paralela à função $(\delta + n + m)\,k$, de forma a indicar o ponto onde a distância entre $f(k)$ e $s \cdot f(k)$, isto é, o consumo por trabalhador eficiente, é máxima.

A regra de ouro dá resposta à última das três questões colocadas inicialmente à análise dinâmica económica: *qual é o equilíbrio de longo* *prazo que é óptimo do ponto de vista social*? Existe um nível de capital por trabalhador eficiente associado a um equilíbrio de longo prazo que é óptimo do ponto de vista social, sendo este aquele que maximiza o consumo da colectividade. Este equilíbrio é alcançado se se conseguir alterar a taxa de poupança para um nível que maximize o consumo, tendo como restrição o facto de que a produção que se destina ao consumo depender do nível de investimento da economia e, portanto, dessa mesma taxa de poupança. No entanto, não existem garantias de que a taxa de poupança que permite obter a maximização do bem–estar seja automaticamente alcançada pelos agentes económicos privados, pelo que se torna necessário a intervenção do Governo na economia de forma a evitar–se desperdício de recursos económicos, isto é, de forma a atingir–se a regra dourada na acumulação de capital. Dito de outra forma: enquanto que a política económica não pode afectar a taxa de crescimento económico de longo prazo — já que esta é determinada pela soma de duas forças exógenas ao funcionamento da economia ($g = n + m$) — ela pode *evitar* que a economia cresça à mesma taxa $g = n + m$ mas tenha uma taxa de poupança mais elevada do que a necessária para maximizar o consumo. É óbvio que, se a economia tiver a mesma taxa de crescimento, quanto menor for a taxa de poupança mais benéfica para o bem–estar será esta situação porque aumenta o nível do consumo per capita. No caso em que a taxa de poupança seja mais baixa do que aquela que corresponde à regra dourada, então um aumento da referida taxa permitirá aumentar o consumo per capita no longo prazo.

Depois da discussão da regra dourada na acumulação de capital podemos apresentar mais uma conclusão do modelo de Solow:

Conclusão 3.6 *A regra dourada na acumulação de capital é passível de ser alcançada no modelo de Solow. No entanto, é pouco provável que os agentes privados da economia atinjam automaticamente (isto é, por iniciativa individual) uma taxa de poupança que maximize o consumo entre vários equilíbrios de longo prazo possíveis. Portanto, o Governo não afecta a taxa de crescimento económico de longo prazo, mas pode intervir de forma a maximizar o consumo na economia.*

3.4 ELP e Distribuição de Rendimento

O modelo de Solow permite também analisar a evolução da remuneração dos factores produtivos no equilíbrio de longo prazo. Como o mercado de factores é competitivo, ambos os factores que recebem remuneração pela sua contribuição para a produção, trabalho (L) e capital (K), são remunerados de acordo com a sua produtividade marginal. Contrariamente a estes dois factores produtivos de natureza *privada*, o conhecimento tecnológico (A) é um factor que tem a natureza de bem *público,* e, portanto, não recebe qualquer compensação económica pela sua participação na produção.

O produto marginal do trabalho é dado pela derivada da função de produção (3.1) relativamente ao factor trabalho. Se utilizarmos uma função de produção tipo Cobb–Douglas $Q_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}$, com $0 < \alpha < 1$, e se a escrevermos na forma intensiva dividindo a mesma por $A_t L_t$, obtemos $q_t = f(k) = k_t^\alpha$. Derivando a expressão da função de produção em valor absoluto em ordem a L, obtemos o valor do produto marginal do trabalho, o qual expresso em termos intensivos virá: $PMG_L = \partial Q_t / \partial L_t = (1-\alpha) A_t k_t^\alpha$. Por sua vez, o produto marginal do capital será dado por $PMG_K = \partial Q_t / \partial K_t = \alpha k_t^{\alpha - 1}$.

Designando o salário real por w e a taxa de lucro real (ou taxa de remuneração real do capital) por r, e igualando estas remunerações reais aos seus respectivos produtos marginais, virá

$$w = PMG_L = (1-\alpha) A_t k_t^\alpha \tag{3.29}$$

$$r = PMG_K = \alpha \cdot k_t^{\alpha-1} \tag{3.30}$$

Destas duas equações nós podemos retirar dois resultados importantes. No equilíbrio de longo prazo temos que $\dot{k} = 0$, portanto, $g_k = 0$. Como a taxa de crescimento dos salários reais será igual a $g_w = g_A + \alpha g_K$, então $g_w = g_A = m$. Isto é, os salários reais crescem à taxa de crescimento do conhecimento tecnológico, no equilíbrio de longo prazo. Por outro lado, como $g_r = (\alpha - 1)\, g_k$, então, por mera substituição obtemos o resultado $g_r = 0$. Portanto, a taxa de remuneração do capital em termos reais permanece constante no longo prazo. Assim, podemos sintetizar a evolução das remunerações reais dos factores produtivos privados através de mais uma conclusão:

Conclusão 3.7 *No equilíbrio de longo prazo, os salários reais crescem à taxa de crescimento do conhecimento tecnológico, enquanto que a taxa de lucro real permanece constante*

$$\begin{aligned} g_w &= g_A = m \\ g_r &= 0. \end{aligned}$$

Destes resultados podemos obter a última conclusão: a distribuição do rendimento entre remunerações do trabalho e remunerações do capital (ou seja, o rácio dos dois tipos de rendimentos, o qual iremos designar por $\mathfrak{D}$) permanece constante no longo prazo. Porquê? Como o conhecimento tecnológico não recebe qualquer compensação económica pela sua participação no processo de produção (em virtude de ser considerado um bem público), o valor da produção em termos reais (Q_t) tem que ser repartido entre as remunerações do capital ($r_t \cdot K_t$) e do trabalho ($w_t \cdot L_t$). Isto é: $Q_t = w_t \cdot L_t + r_t \cdot K_t$. Definindo o rácio entre estes dois tipos de rendimento como $\mathfrak{D}_t \equiv (w_t \cdot L_t) / (r_t \cdot K_t)$, a sua taxa de crescimento será dada pela relação das seguintes taxas de crescimento

$$g_{\mathfrak{D}} = (g_w + g_L) - (g_r + g_K)$$

Como no equilíbrio de longo prazo temos os seguintes resultados: $g_w = m$, $g_L = n$, $g_r = 0$, $g_K = n + m$, então podemos concluir que $g_{\mathfrak{D}} = 0$. Isto é:

Conclusão 3.8 *No equilíbrio de longo prazo, a distribuição do rendimento entre remunerações do capital e do trabalho permanece constante.*

3.5 Um Exemplo Numérico

Vamos agora proceder a uma simulação numérica no sentido de exemplificar os vários aspectos que analisámos ao longo deste capítulo. Os valores para os parâmetros e para as variáveis pré–determinadas deste modelo serão de forma a que possam fornecer resultados que estejam de acordo com a realidade contemporânea relativamente às variáveis económicas fundamentais, como sejam a taxa de crescimento do PIB, do PIB per capita, do consumo per capita, etc.. Vamos fazer simulações que cubram duas situações diferentes: países pobres, e países ricos.

Vamos fazer várias simulações que cubram diferentes situações iniciais quanto aos valores positivos para $k(0)$. Países ricos terão certamente valores elevados deste stock de capital, enquanto que países pobres terão valores baixos para o mesmo. Note que um país rico pode ter um stock de capital em termos intensivos mais elevado que o seu valor de equilíbrio de longo prazo, causado por exemplo por uma força exógena ou externa ao funcionamento desta economia. Por exemplo, isto pode acontecer se houver uma grande entrada de capitais financeiros provenientes de outros países por razões que podem ser políticas, económicas ou sociais. O que acontece nestes casos? Como iremos ver, o nível de capital em termos intensivos neste país voltará, ao fim de algum tempo, para o nível que tinha antes do processo de imigração se ter iniciado.

Nesta simulação vamos assumir os seguintes valores para parâmetros do modelo:

$\alpha = 0.4$	,	$s = 0.24$	,	$\delta = 0.1$
$n = 0.01$	,	$m = 0.03$		

As condições iniciais são não–triviais (ou seja, os valores iniciais são todos positivos), em virtude de não fazer sentido uma economia ter zero trabalhadores, um nível de capital nulo, ou um nível de conhecimento tecnológico igual a zero. Portanto teremos

$$K(0) > 0, L(0) > 0, A(0) > 0 \quad , \quad \text{donde resulta:} \quad k(0) > 0$$

Deve recordar que uma das características fundamentais dos modelos dinâmicos são as condições iniciais e, consequentemente, a sua explicitação deve ser apresentada de forma clara. Muitas das vezes, os resultados obtidos poderão ser drasticamente alterados caso as condições iniciais sejam apenas ligeiramente diferentes. Por exemplo, no nosso caso, se o stock de capital inicial fosse igual a zero ($K(0) = 0$), a economia ficaria permanentemente num equilíbrio de longo prazo em que a produção seria nula, o consumo seria nulo, o mesmo se passando com o nível do investimento.

A equação que reflecte o comportamento dinâmico do modelo discutido ao longo das secções anteriores é a expressão (3.23). Substituindo nesta equação a expressão da função de produção em termos intensivos, a qual é dada por uma função tipo Cobb–Douglas $f(k_t) = k_t^{\alpha}$, teremos

$$\dot{k}_t = s \cdot k_t^{\alpha} - (\delta + n + m)\, k_t$$

Substituindo os valores dos parâmetros acima apresentados nesta equação, obteremos a expressão da equação diferencial que representa a dinâmica de toda a economia

$$\dot{k}_t = 0.24 \cdot k_t^{0.4} - 0.14 \cdot k_t$$

Como se comporta esta equação diferencial? Na *Figura 3.7* mostramos várias trajectórias possíveis que resultam de diferentes pontos de partida de uma mesma economia (ou de diferentes economias). Como se pode facilmente constatar nesta figura, indiferentemente do ponto de partida todas as trajectórias convergem para um valor de equilíbrio de longo prazo, o qual será de $k_t = k^{\star} \simeq 2.45$. Note que este valor de $k^{\star}$ pode ser

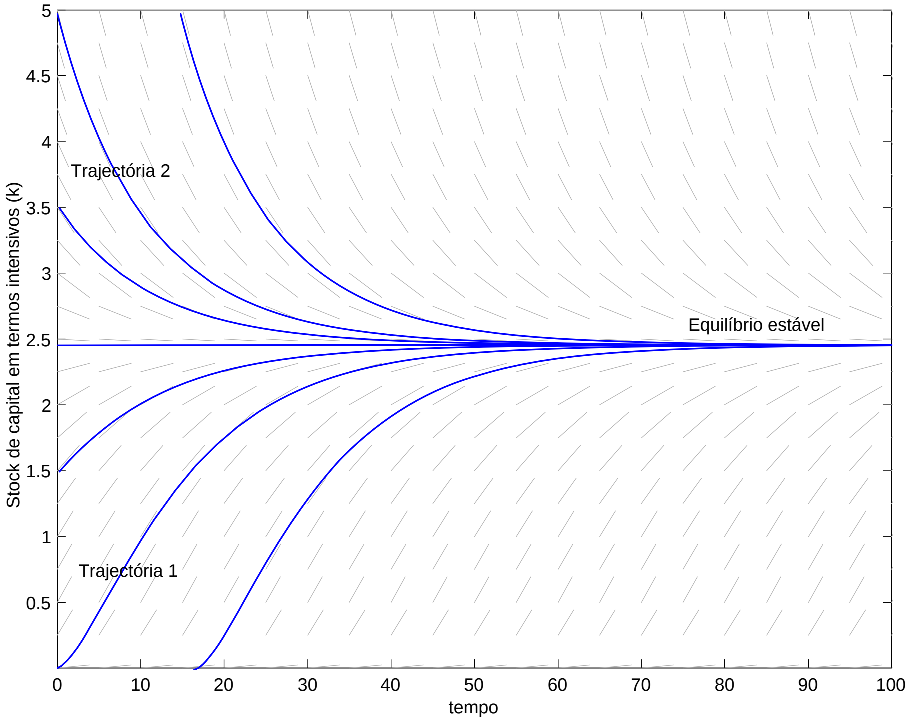

Figura 3.7: DIFERENTES TRAJECTÓRIAS NO MODELO DE SOLOW. *A trajectória 1 é a de um país pobre, enquanto que a trajectória 2 reflecte a situação de um país rico que sofreu um choque positivo no seu stock de capital. Neste modelo existe convergência económica entre países pobres e ricos.*

facilmente calculado a partir da equação acima, bastando para tal impor à mesma a condição $\dot{k}_t = 0$:

$$\dot{k}_t = 0 \Rightarrow k_t = k^\star \simeq 2.45$$

Portanto, através da mera observação da figura podemos concluir que este modelo apresenta um equilíbrio de longo prazo que é único e que é estável, já que qualquer que seja o ponto de partida, a economia converge sempre para $k_t = k^\star$.

Note que caso considerássemos a condição inicial $K(0) = 0$, então teríamos $k(0) = 0$, o que levaria a um *equilíbrio de longo prazo instável* com $k^* = 0$. Este equilíbrio é instável pois qualquer choque que fizesse com que a economia passasse a ter um nível de $K(0) > 0$, e portanto $k(0) > 0$, mesmo que este fosse bastante pequeno ou até insignificante, levaria a economia ao longo do tempo para o ponto de equilíbrio estável

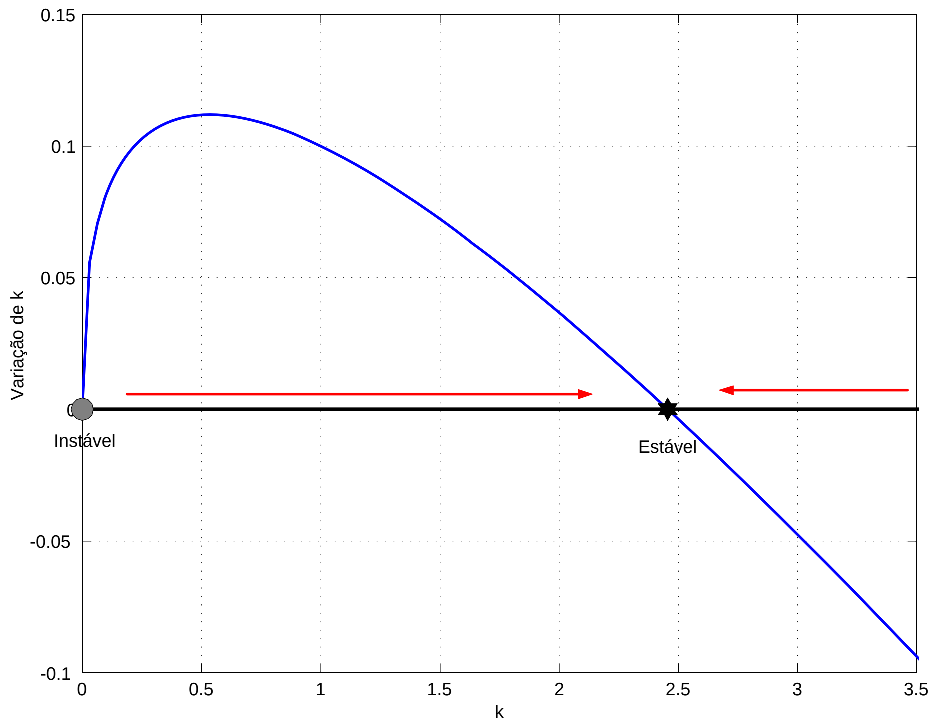

Figura 3.8: A LINHA DE FASES NO MODELO DE SOLOW.

que obtivémos na *Figura 3.7*. Isto é, levaria a economia para $k^* = 2.45$.

Esta discussão dos pontos de equilíbrio estáveis e instáveis pode ser facilmente representada pela *linha ou diagrama de fases*, a qual é apresentada na *Figura 3.8*. Como se pode verificar nesta figura, valores para k_t compreendidos no intervalo $k_t \in]0, 2.45[$, levará a que a variação de k_t seja positiva, o que significa que k_t estará necessariamente a crescer ao longo do tempo até alcançar o seu equilíbrio de longo prazo ($k^* = 3.45$). Por outro lado, se k_t se encontrar no intervalo $k_t \in]2.45, +\infty[$, então a variação de k_t será negativa, significando que k_t estará a decrescer até atingir $k^* = 3.45$.

Voltemos agora às duas trajectórias referidas como sendo a de um país pobre e a de um país rico. A primeira é representada pela trajectória 1, enquanto que a do país rico é representada pela trajectória 2 (vide *Figura 3.7*). No caso do país pobre, no momento de partida ($t = 0$) o seu processo de acumulação de capital inicia–se com um nível de k_t ligeiramente superior a zero (mas superior a zero). Conforme podemos facilmente constatar na referida figura, a economia levará cerca de seis décadas e meia a convergir para o nível de equilíbrio de longo prazo de

k_t, sendo este igual a $k^\star \simeq 2.45$. Portanto, uma economia que seja pobre irá convergir para o nível de equilíbrio do stock de capital em termos intensivos (ou em termos de eficiência) dos países mais ricos.

Vejamos agora o que acontece a um país já rico, que tenha já alcançado o nível de $k_t = k^\star \simeq 2.45$, mas que devido a uma conjuntura internacional favorável beneficie de uma entrada massiva de capitais (os quais param depois desta conjuntura ter sido ultrapassada). Devido a este choque positivo, a economia "salta" para um nível do stock de capital per capita em termos intensivos superior ao nível internacional, passando o mesmo a ser de cerca de $k(0) = 5$ conforme *Figura 3.7.* Neste caso, o facto curioso é que o modelo prevê que este choque positivo seja "absorvido" ou eliminado ao longo do tempo, levando com que a economia tenda para o nível do stock de capital (e, obviamente, do produto e consumo também) que é comum a todas as economias inseridas neste espaço económico onde a tecnologia está livremente disponível para todas elas. Este choque positivo é eliminado fazendo com que $k(0) = 5$ convirja para $k^\star \simeq 2.45$ também em pouco menos do que sete décadas.

Portanto, este modelo permite mostrar os seguintes pontos relativamente ao crescimento económico em termos internacionais:

Conclusão 3.9 *(i) As condições de partida, em termos de pobreza ou riqueza entre diferentes economias, não explicam o ritmo do crescimento económico de equilíbrio de longo prazo;*
(ii) Todos os países convergirão para o mesmo equilíbrio de longo prazo;
(iii) No entanto, esta convergência deverá levar várias décadas para ser alcançada.

3.6 Sumário

1. O equilíbrio de longo prazo no modelo de Solow existe e é único.

2. O equilíbrio de longo prazo do modelo é estável, já que independentemente do ponto de partida, a economia converge para uma trajectória de crescimento equilibrado.

3. A economia converge para uma trajectória de crescimento equilibrado de longo prazo, e quando esta trajectória é alcançada cada variável cresce a uma taxa constante.

4. No equilíbrio de longo prazo, o produto per capita e o capital per capita crescem apenas se existir crescimento no nível do conhecimento tecnológico, isto é, se $m > 0$. Portanto, a melhoria das condições médias de vida depende inteiramente da taxa de crescimento da tecnologia.

5. O crescimento económico não depende de qualquer força económica de natureza endógena, isto é, como a taxa de crescimento da produção é igual a $n + m$, e estas duas taxas são assumidas como exógenas pelo modelo, então a política económica pouco ou nada pode fazer no sentido de fomentar o crescimento económico no longo prazo.

6. A regra dourada na acumulação de capital é passível de ser alcançada no modelo de Solow. No entanto, é pouco provável que os agentes privados da economia atinjam automaticamente (isto é, por iniciativa individual) uma taxa de poupança que maximize o consumo entre vários equilíbrios de longo prazo possíveis. Portanto, o Governo não afecta a taxa de crescimento económico de longo prazo, mas pode intervir de forma a maximizar o consumo na economia.

7. No equilíbrio de longo prazo, os salários reais crescem à taxa de crescimento do conhecimento tecnológico, enquanto que a taxa de lucro real permanece constante.

8. No equilíbrio de longo prazo, a distribuição do rendimento entre remunerações do capital e do trabalho permanece constante.

9. O modelo prevê a existência de convergência económica entre os países pobres e os países ricos, e quando esta convergência estiver terminada todas as economias terão o mesmo nível de capital, produto, e consumo em termos intensivos.