Capítulo 4

Modelo de Solow: Efeitos de Transição Dinâmica

No capítulo anterior vimos que, quando a economia atinge o seu equilíbrio de longo prazo, todas as variáveis endógenas passam a crescer a uma taxa constante, podendo esta ser positiva, nula, ou mesmo negativa. O que acontece a este equilíbrio caso:

- Se verifique uma alteração num dos vários parâmetros do modelo que expressam o comportamento dos agentes económicos?

- A economia sofra um choque temporário sobre uma das suas variáveis fundamentais (por exemplo, se um terramoto destruir uma parte significativa do seu stock de capital)?

Como seria de esperar, choques exógenos ou alterações nos parâmetros provocam alterações na evolução das variáveis endógenas, levando–as para um novo equilíbrio de longo prazo (obviamente, no caso deste existir), podendo o mesmo ser (ou não) bastante diferente do equilíbrio inicial.

Estes efeitos *entre dois equilíbrios de longo prazo* que resultam de choques temporários sobre a economia ou de alterações permanentes nas decisões dos agentes económicos designam–se por **efeitos de transição dinâmica**. Contrariamente aos equilíbrios de longo prazo — os quais pretendem apresentar o comportamento das variáveis endógenas no *longo prazo,* ou seja, após o equilíbrio ter sido alcançado e depois mantido ao longo do tempo — os efeitos de transição representam a evolução das variáveis endógenas no *curto prazo.* Por esta razão, os mesmos podem ser facilmente confundidos com as próprias trajectórias de equilíbrio de longo prazo das referidas variáveis, o que é um erro grosseiro nas análises de comportamento económico dinâmico.[1]

Estes efeitos de transição dinâmica podem ter dois tipos de impactos sobre a economia: (i) podem produzir apenas efeitos de curto prazo, quando as características do novo equilíbrio de longo prazo forem totalmente iguais às do equilíbrio inicial; (ii) podem produzir, para além dos efeitos de curto prazo referidos no ponto anterior, também alterações nas características do equilíbrio de longo prazo, fazendo por exemplo com que a economia possa crescer a uma taxa mais elevada no novo equilíbrio.

No presente modelo faz sentido analisar os impactos de alterações nos seguintes parâmetros: na taxa de poupança, na taxa de crescimento da população, e na taxa de crescimento do conhecimento tecnológico. Como iremos demonstrar ao longo deste capítulo, as alterações nestes parâmetros produzem resultados ou impactos, quer sobre o equilíbrio de longo prazo, quer sobre o processo de transição entre dois equilíbrios de longo prazo, que são em alguns casos totalmente diferentes uns dos outros.

Portanto, é necessário perceber bem as pequenas subtilezas da análise dinâmica para se compreender com rigor os processos económicos reais, porque estes são na sua essência processos dinâmicos que estão normalmente sujeitos a choques, mas que tendem a permanecer dentro de uma tendência de longo prazo que se mantém relativamente estável no tempo (equilíbrio de longo prazo). De seguida vamos analisar os impactos dos diferentes choques sobre o modelo de Solow.

4.1 Variação na Taxa de Poupança

O que acontece ao equilíbrio de longo prazo se a taxa de poupança aumentar de forma permanente de s_0 para s_1, $(s_1 > s_0)$? Vamos ver que este tipo de aumento provoca apenas um efeito dinâmico: provoca *um efeito temporário* (de transição ou de curto prazo) sobre a taxa de crescimento económico, não provocando quaisquer *efeitos permanentes* (ou de longo prazo) sobre a referida taxa.

4.1.1 Análise gráfica

Vamos explicar estes efeitos usando primeiro a *Figura 4.1.* Suponha que a economia se encontra inicialmente no equilíbrio de longo prazo dado pelo ponto A na referida figura. O nível do stock de capital por trabalhador eficiente é dado por k_0^*, e a taxa de crescimento será igual a $g_{K(0)} = n+m$,

[1] Note que existe ainda uma outra situação em que a evolução da economia reflecte um processo de transição dinâmica. Este diz respeito ao percurso que uma economia percorre, partindo de uma determinada situação inicial, até alcançar o seu equilíbrio de longo prazo.

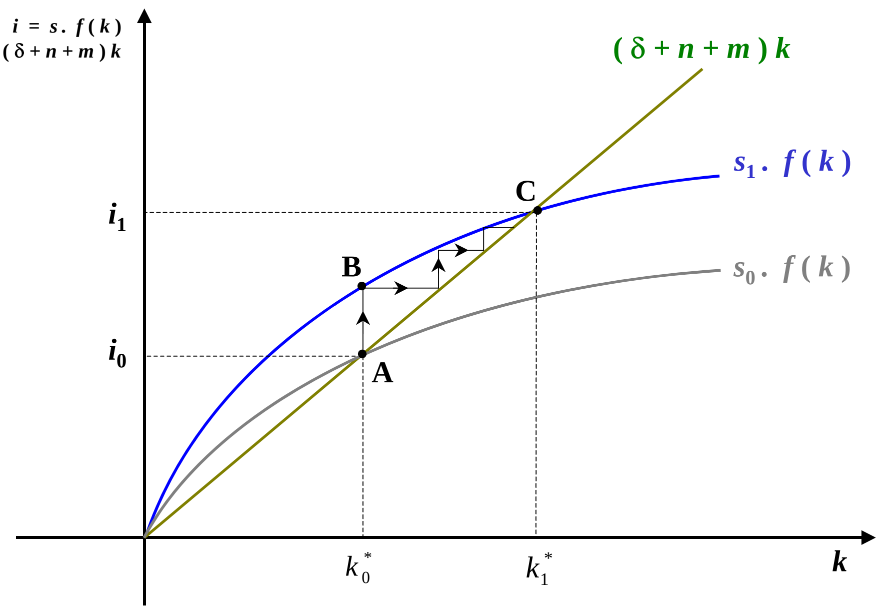


Figura 4.1: O IMPACTO DE UM AUMENTO NA TAXA DE POUPANÇA.

como vimos no capítulo anterior. Se a taxa de poupança aumentar de s_0 para s_1,a função $s_0 \cdot f\,(k)$ desloca–se para cima, para $s_1 \cdot f\,(k)$. Portanto, o novo equilíbrio de longo prazo será atingido no ponto C.

A explicação económica do movimento do ponto A para C é simples. Um aumento na taxa de poupança de s_0 para s_1 faz com que, para $k_t = k_0^\star$, o novo nível de investimento em termos de eficiência seja superior às suas necessidades de reposição de forma a manter o stock de capital em termos de eficiência constante. Isto é, como $s_1 \cdot f\,(k_0) > (\delta + n + m)\,k_0$, então $\dot{k}_0 > 0$, o que implica que k_t passará a aumentar ao longo do tempo. Este processo só termina quando se atinge o nível de capital por unidade de trabalho eficiente de equilíbrio de longo prazo correspondente ao novo valor da taxa de poupança $(k_t = k_1^\star)$. Quando este novo equilíbrio de longo prazo for atingido $(k_t = k_1^\star)$, k_t irá permanecer constante a partir desse momento e, por consequência, todas as variáveis passarão novamente a crescer às mesmas taxas que tinham no equilíbrio anterior, $g_{K(1)} = n+m$.

Portanto, em ambos os equilíbrios de longo prazo, dados pelos pontos A e C, teremos os seguintes resultados [2]

[2]Lembre–se que $g_Q = g_k + g_E$; como $\dot{k} = 0$, então $g_k = 0$, e como $g_E = n + m$, então $g_Q = n + m$.

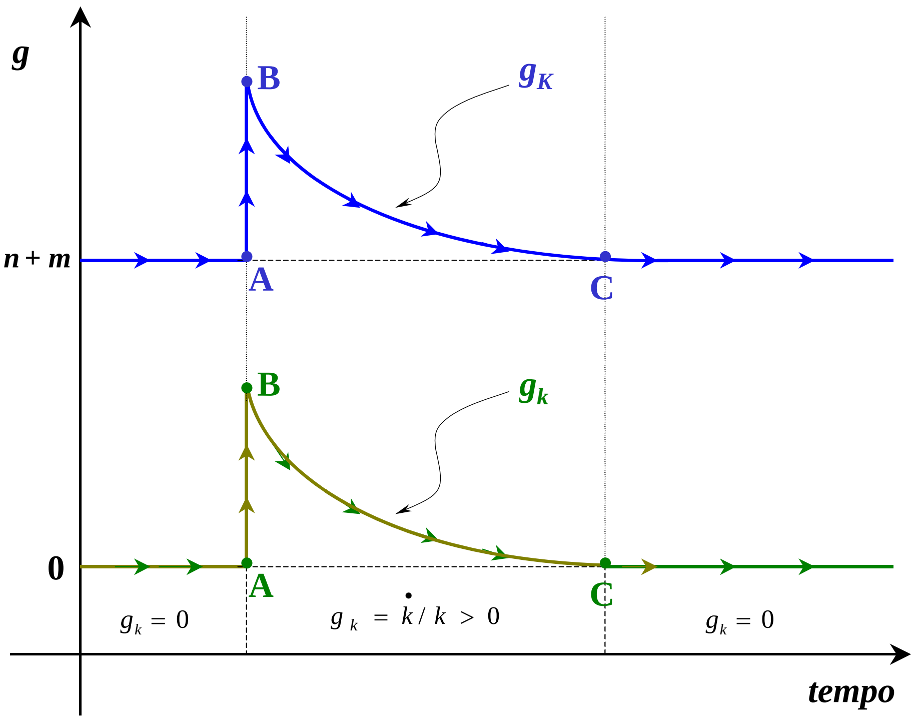


Figura 4.2: IMPACTO DE UM AUMENTO DA TAXA DE POUPANÇA SOBRE AS TAXAS DE CRESCIMENTO. *Este aumento leva a que as taxas de crescimento do stock de capital em valor absoluto* (g_K)*, e do stock de capital em termos intensivos ou em termos de eficiência* (g_k)*, sejam alteradas apenas no curto prazo. No novo equilíbrio de longo prazo, elas mantêm os mesmos valores do equilíbrio inicial.*

- todas as *variáveis medidas em valor absoluto* crescem a uma taxa igual a $n + m$ (por exemplo, o produto total cresce à taxa $g_Q^\star = n + m$),

- todas as *variáveis medidas em termos per capita* crescem a uma taxa igual a m (por exemplo, o produto per capita cresce à taxa $g_{Q/L}^\star = m$)

- as *variáveis medidas em termos per capita e de eficiência (ou seja em termos intensivos)* crescem a uma taxa igual a zero (por exemplo, o produto em termos intensivos cresce à taxa $g_q^\star = 0$, e também $g_k^\star = 0$)

No entanto, como foi acima referido, estes resultados não são válidos para a *fase de transição* entre os pontos A e C na *Figura 4.1.* Nesta fase as taxas de crescimento das várias variáveis são superiores aos seus respectivos valores correspondentes aos equilíbrios de longo prazo, em virtude de $\dot{k} > 0$ durante este processo. Esta variação positiva de k resulta de dois efeitos opostos que não são fáceis de visualizar à partida, pelo que é conveniente explicá–los de forma detalhada.

Primeiro, quando se verifica o aumento súbito na taxa de poupança de s_0 para s_1, o nível do consumo diminui instantaneamente e, por consequência, os níveis do investimento e do stock de capital aumentam também de forma imediata. Este movimento ocorre logo após se verificar a subida na taxa de poupança — e que se repercute sobre as taxas de crescimento do stock de capital por trabalhador eficiente (g_k) e do stock de capital em valor absoluto (g_K) — e pode ser visto como a subida abrupta de g_K e g_k entre os pontos A e B da *Figura 4.2.* Isto é, entre estes dois pontos verifica–se uma variação positiva de todas as taxas de crescimento quer de variáveis expressas em termos absolutos quer em termos intensivos ($g_k > 0$, e $g_K > 0$).

Segundo, sabemos também que no ponto de equilíbrio C (pela própria definição de equilíbrio de longo prazo onde $\dot{k} = 0$) teremos novamente $g_k = 0$. Portanto, tendo em conta que $g_k = 0$ em A, e $g_k = 0$ em C, e se g_k sofre um aumento positivo brusco ($g_k > 0$) quando se verifica o aumento da taxa de poupança (entre A e B), então isto implica que g_k terá forçosamente de diminuir após o salto para o ponto B de forma a atingir o valor zero em C. É este processo que está presente na *Figura 4.2,* como o movimento entre os pontos B e C. Em termos económicos, o que explica esta diminuição gradual de g_k até ao valor zero no ponto C, é a existência de *rendimentos decrescentes na acumulação de capital.*[3] Um

[3] Os rendimentos decrescentes na acumulação de capital podem ser vistos na inclinação côncava da função de produção em termos intensivos, a qual está representada

aumento da taxa de poupança produz um grande impacto inicial sobre a taxa de crescimento, mas estes rendimentos decrescentes irão fazer com que esse impacto tenda a reduzir–se (e mesmo a anular–se) ao longo do tempo.

O raciocínio que acabámos de fazer dizia respeito às variações em g_k. No entanto, o que acontece às variações na taxa de crescimento do stock de capital em valor absoluto, ou seja, em g_K? A resposta é bastante fácil. Note que podemos escrever $g_K = g_k + m + n$.[4] Aplicando o conceito de diferencial sobre esta expressão vemos que a variação de g_K será dada pela expressão $dg_K = dg_k + dn + dm$. Como estamos a considerar uma variação em s, m e n permanecem ambos constantes ($dm = 0$ e $dn = 0$), assim teremos $dg_K = dg_k$. Portanto, a taxa de crescimento do stock de capital em valores absolutos acompanha a trajectória da taxa do stock de capital em termos intensivos, sofrendo ambas o mesmo impacto. Este impacto corresponde ao movimento de A para B, e depois para C, na *Figura 4.2.*

Devemos ainda realçar que o comportamento destas duas variáveis (k e K) pode ser facilmente extrapolado para o comportamento de todas as restantes variáveis expressas em termos intensivos (extrapolando a partir de k), ou em termos de valores absolutos (extrapolando a partir de K). Por exemplo, a taxa de crescimento do produto total tem uma trajectória neste processo semelhante, mas não exactamente igual, à trajectória do stock de capital. A demonstração deste facto é bastante simples. Utilizando a função de produção Cobb-Douglas,[5] podemos obter a seguinte expressão para a taxa de crescimento do produto total: $g_Q = \alpha g_K + (1-\alpha)(g_A + g_L)$. Como neste processo de transição dinâmica apenas se alterou a taxa de poupança, então as variações de g_A e g_L serão nulas: $dg_A = 0$ e $dg_L = 0$. Portanto, na equação anterior, as únicas variáveis que sofrem alterações serão g_Q e g_K. A substituição destes dados na mesma equação leva a que a variação de g_Q seja apenas função de variações em g_K:

$$dg_Q = \alpha \cdot dg_K$$

Como uma das nossas hipóteses estipula que $0 < \alpha < 1$, então neste processo de transição teremos sempre $dg_Q < dg_K$. No entanto, note que quando o processo de transição estiver terminado, ou seja quando o novo equilíbrio de longo prazo for alcançado, teremos $dg_Q = dg_K = 0$ e estas duas taxas serão novamente iguais.

na *Figura 4.1* através do termo $s \cdot k^\alpha$, sendo $0 < \alpha < 1$.

[4] A definição do capital na forma intensiva é dada por $k \equiv K/AL$. Portanto, podemos escrever $K = kAL$. Aplicando taxas de crescimento a esta última expressão obteremos $g_K = g_k + g_A + g_L$. Como $g_A = m$ e $g_L = n$, teremos finalmente o resultado: $g_K = g_k + m + n$.

[5] A expressão desta função é dada por $Q_t = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}$.

4.1.2 Análise algébrica

★★ Note que a explicação acima apresentada pode ser desenvolvida de uma forma mais clara e objectiva através de uma simples demonstração algébrica. Vamo–nos centrar sobre o que acontece a g_k ao longo do processo de transição, embora possa depois aplicar estes resultados às restantes variáveis, como vimos na secção anterior. De forma a simplificar a simbologia, suponha que a função de produção é uma Cobb–Douglas, a qual é expressa em termos intensivos por $q_t = f(k_t) = k_t^{\alpha}$, com $0 < \alpha < 1$ (vide capítulo anterior). Da equação fundamental do modelo de Solow, a qual é dada por $\dot{k} = s \cdot f(k) - (\delta + n + m) k$, podemos obter uma expressão para a taxa de crescimento de k, bastando para tal dividir aquela expressão por k, já que esta taxa é definida por $g_k = \dot{k}/k$. Portanto, utilizando $f(k_t) = k_t^{\alpha}$, e após uma mera simplificação algébrica, teremos

$$g_k = \frac{\dot{k}}{k} = s \cdot k^{\alpha-1} - (\delta + n + m) \tag{4.1}$$

A equação (4.1) diz–nos que g_k pode variar se os parâmetros (s, δ, n, m) variarem ou se k variar. Como estamos aqui a analisar uma variação na taxa de poupança, apenas s e k produzirão tais variações. Utilizando o conceito de diferencial obteremos a seguinte expressão para a variação de g_k: $dg_k = \left(k^{\alpha-1}\right) ds + \left[s \cdot (\alpha - 1) k^{\alpha-2}\right] dk$.[6] Um simples rearranjo desta equação dará o seguinte resultado [7]

$$dg_k = \left(k^{\alpha-1}\right) ds - \left[s \cdot \frac{(1-\alpha)}{k^{2-\alpha}}\right] dk \tag{4.2}$$

O primeiro termo do lado direito da equação (4.2), ou seja $\left(k^{\alpha-1}\right) ds$, dá–nos o impacto que uma variação na taxa de poupança (ds) exerce sobre a variação de g_k, (dg_k), mantendo–se k constante $(dk = 0)$. Portanto, este termo mede o aumento súbito de g_k entre os pontos A e B da *Figura 4.2.* Note que este primeiro termo mede também a variação da taxa de crescimento do capital em valores absolutos (dg_K) entre estes dois pontos, já que $dg_K = dg_k$. Esta igualdade pode ser facilmente obtida. Sabemos que $g_K = g_k + n + m$. Como m e n não variam, então a variação de g_K será totalmente determinada pela variação em g_k.

Por outro lado, o segundo termo do lado direito da equação (4.2) dá–nos a variação de g_k quando s permanece constante e k varia. Este impacto corresponde ao movimento entre os pontos B e C da referida

[6] Lembre–se que o conceito de diferencial de uma função $f(x, y)$ é dado pela expressão: $df = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$. Onde f'_i é a derivada parcial de f em ordem a cada um dos seus argumentos: $i = x, y$.

[7] Lembre–se que o símbolo de diferencial "d " pretende dar a *variação* de uma variável resultante de *variações* nas restantes variáveis.

figura. Este segundo termo é negativo, mas tende para zero (é progressivamente menor em termos absolutos) à medida que k vai aumentando, partindo de k_0^* até atingir k_1^*, e isto por duas razões. Primeiro, porque o valor de $-\left[s(1-\alpha)/k^{2-\alpha}\right] dk$ é negativo perante aumentos de k (isto é, se $dk > 0$); e, segundo, porque o termo $s(1-\alpha)/k^{2-\alpha}$ se vai tornando cada vez mais pequeno à medida que k vai aumentando.

No ponto C os dois termos do lado direito da equação (4.2) são exactamente iguais, anulando–se, e g_k volta de novo a ser igual a zero. Portanto, a taxa de crescimento económico regressa ao seu valor inicial, $g_K = n+m$, após o processo de transição dinâmica estar concluído. ■■

4.1.3 Exemplo numérico

Vamos agora ilustrar os resultados que apresentámos acima com uma simulação numérica. Continuamos a assumir os mesmos valores para os parâmetros que utilizámos no capítulo anterior. Estes são os seguintes:

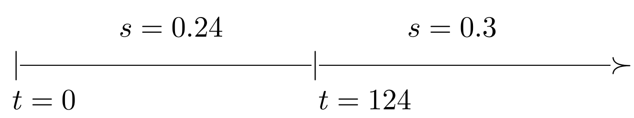
$$\alpha = 0.4 \quad , \quad s = 0.24 \quad , \quad m = 0.03 \quad , \quad n = 0.01 \quad , \quad \delta = 0.1$$

Como vimos, estes parâmetros levam a um equilíbrio de longo prazo que é caracterizado pelos principais pontos que apresentamos de seguida (mais uma vez o asterisco pretende representar *o valor de equilíbrio de longo prazo* para a variável em questão):

$$k^\star = 2.45 \quad , \quad g_k^\star = g_q^\star = 0 \quad , \quad g_K^\star = g_Q^\star = 0.04$$

Na *Figura 4.3* apresentamos uma simulação numérica que confirma estes resultados, em que utilizámos os parâmetros com valores acima referidos e uma condição inicial $k(0) = 1$. Quer o valor de k, quer as várias taxas de crescimento — g_k , g_K , g_Q — convergem gradualmente para os seus equilíbrios de longo prazo. Nesta figura, pode–se verificar que quando o período 75 é alcançado, a economia já se encontra no seu equilíbrio de longo prazo, mantendo–o ao longo do tempo caso não ocorra nenhuma alteração significativa.

Suponhamos agora que, quando $t = 124$, se verifica uma alteração nas opções dos agentes económicos: a taxa de poupança, que era até então de $s = 0.24$, passa a partir desse ano a ser de $s = 0.3$. Note que este aumento é permanente a partir desse ano, ou seja, a taxa de poupança manter–se–á inalterada a partir de $t = 124$



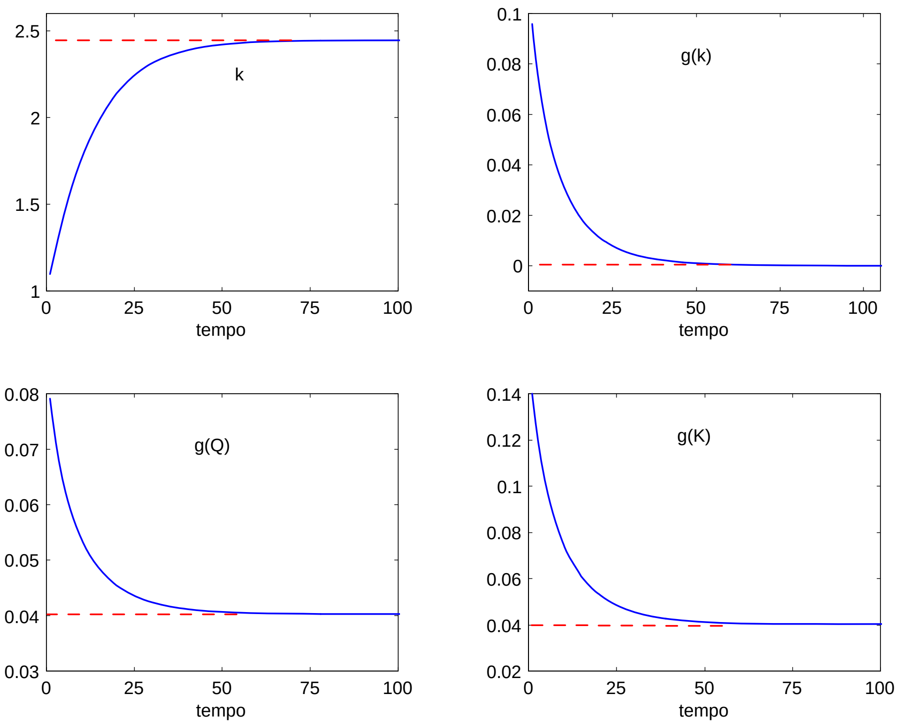


Figura 4.3: EXEMPLO DE UM PROCESSO DE TRANSIÇÃO DINÂMICA DE UMA ECONOMIA. *Partindo da condição inicial $k(0) = 1$, as várias variáveis convergem para os seus respectivos equilíbrios de longo prazo ao fim de algumas décadas.*

Os impactos desta subida na taxa de poupança sobre o equilíbrio inicial podem ser vistos na *Figura 4.4*, onde se constata que esta alteração leva aos seguintes factos. Primeiro, o nível do stock de capital em termos intensivos, que era de $k_t = 2.45$ no equilíbrio que se verificava antes do aumento da taxa de poupança, cresce ao longo do processo de transição até alcançar o seu novo valor de equilíbrio de longo prazo que é de cerca de $k_t = 3.35$.

Segundo, no que diz respeito às várias taxas de crescimento apresentadas na *Figura 4.4* — g_k , g_K , g_Q — a evolução dinâmica das mesmas ao longo do processo de transição confirma os resultados obtidos nas sub–secções anteriores. Quando a taxa de poupança sofre o aumento de 0.24 para 0.3 em $t = 124$, todas as taxas de crescimento sofrem um aumento brusco devido ao aumento também brusco do investimento (via poupança). No entanto, estas taxas irão depois diminuir gradualmente ao longo do tempo como consequência da existência de rendimentos decrescentes na acumulação de capital. Quando o processo de transição estiver terminado, as taxas de crescimento voltam a ser novamente iguais aos valores que tinham antes do aumento da taxa de poupança se ter verificado. Ou seja, um equilíbrio de longo prazo deu lugar a um processo de transição dinâmica (em resultado de um aumento da taxa de poupança), o qual, por sua vez, deu lugar ao fim de cerca de sete décadas a um novo equilíbrio de longo prazo que em nada difere do equilíbrio inicial.[8]

4.1.4 Principais resultados

Em termos de síntese, podemos dizer que, perante uma subida da taxa de poupança, o modelo de Solow produz alguns resultados importantes que podem ser sintetizados nos seguintes pontos: (i) efeitos de curto *versus* efeitos de longo prazo; (ii) taxa de poupança e condições médias de vida da população; (iii) robustez do equilíbrio de longo prazo.

Curto versus longo prazo

A primeira principal conclusão da análise de variações na taxa de poupança tem a ver com o facto de uma subida na taxa de poupança *não provocar* um aumento no nível da taxa de crescimento económico de longo prazo. Este resultado do modelo de Solow contraria uma ideia convencional que encontramos normalmente no discurso político e mesmo jornalístico relativamente ao impacto da poupança sobre a taxa de crescimento económico. No longo prazo esta taxa é dada pela soma de duas

[8] Em forma de exercício, tente mostrar porque razão, *durante o processo de transição dinâmica*, a evolução da taxa de crescimento do produto em valores absolutos (g_Q) é diferente da evolução da taxa de crescimento do stock de capital em valores absolutos (g_K).

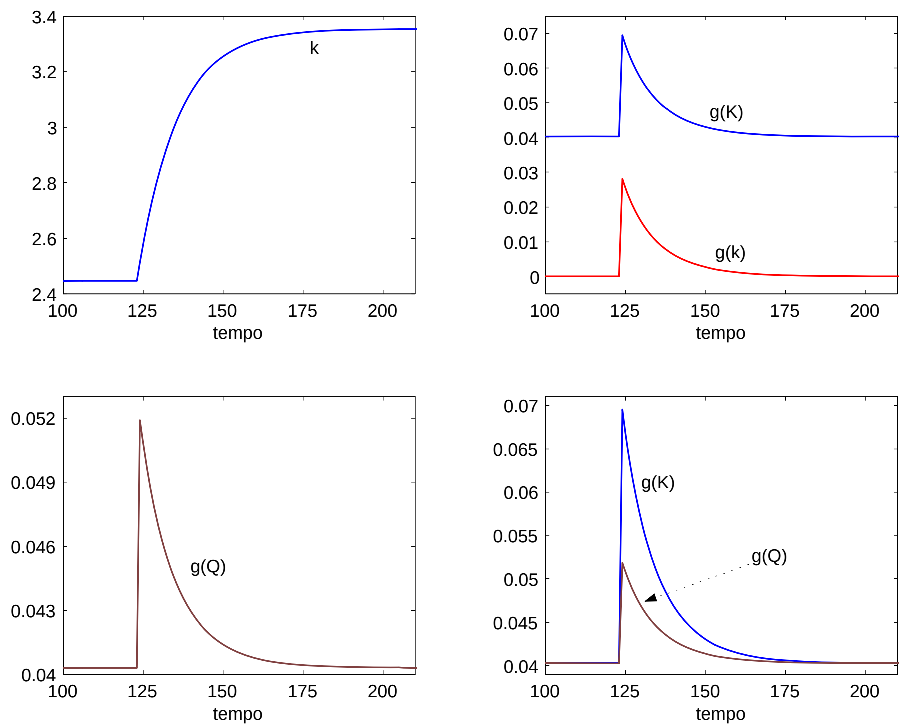


Figura 4.4: OS IMPACTOS DE UM AUMENTO NA TAXA DE POUPANÇA SOBRE O EQUILÍBRIO DE LONGO PRAZO.

forças exógenas, o crescimento da população e o crescimento do conhecimento tecnológico ($g_Q^\star = n + m$). Um aumento da taxa de poupança produz efeitos positivos sobre esta taxa (g_Q) apenas no curto prazo, entre dois equilíbrios de longo prazo, ou seja, produz *efeitos de transição* no modelo de crescimento. Isto leva–nos à primeira conclusão relativamente à transição dinâmica no modelo de Solow:

Conclusão 4.1 *Um aumento da taxa de poupança não tem efeitos positivos permanentes sobre o crescimento económico de longo prazo; apenas tem efeitos positivos no curto prazo (ou temporários) durante o processo de transição entre dois equilíbrios de longo prazo.*

Os valores destas taxas de crescimento no equilíbrio de longo prazo, os quais foram objecto de estudo detalhado no capítulo anterior, são novamente apresentados na Caixa seguinte:

Taxas de crescimento no equilíbrio de longo prazo

exógenas		endógenas		
$g_L = n$	$g_A = m$	$g_k^\star = g_q^\star = 0$	$g_{K/L}^\star = g_{Q/L}^\star = m$	$g_K^\star = g_Q^\star = n+m$

Taxa de poupança e níveis médios de vida

Existe ainda uma outra conclusão importante que se pode retirar dos impactos de um aumento na taxa de poupança sobre as condições médias de vida em termos económicos. Como vimos, na nova situação de equilíbrio de longo prazo, no ponto C, todas as variáveis estão a crescer às mesmas taxas da situação de partida. No entanto, os níveis do capital, do produto, e do consumo (em termos absolutos, em termos per capita, e em termos de eficiência) na economia serão mais elevados do que no equilíbrio inicial porque o stock de capital em termos de eficiência é superior no novo equilíbrio ($k_1^\star > k_0^\star$).

Em termos gráficos, como é facilmente constatável na *Figura 4.1*, economias com idênticas taxas de crescimento da população e de conhecimento tecnológico, *mas com diferentes taxas de poupança*, terão diferentes níveis de capital por trabalhador eficiente no equilíbrio de longo prazo ($k^\star$). Por exemplo, suponha que as taxas de poupança s_0 e s_1 dizem respeito a dois países diferentes: os países $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_1$. No equilíbrio de longo prazo relativo a cada país teremos um determinado nível de k associado a esse equilíbrio: $k_0^\star$ para o país $\mathcal{P}_0$ e $k_1^\star$ para o país $\mathcal{P}_1$. Portanto, podemos concluir que os países onde se verifiquem taxas de poupança mais elevadas terão níveis de capital por trabalhador eficiente mais elevados do que os países onde a taxa de poupança é mais baixa.

Tendo em consideração que o nível da produção por trabalhador eficiente é uma função positiva do nível do capital também por trabalhador eficiente [9]

$$q^\star = f(k^\star)$$

e que a produção é repartida entre consumo e investimento — vide capítulo anterior — isto é

$$q^\star = c^\star + i^\star$$

então, quanto maior for $k^\star$, maiores tenderão a ser os níveis de $q^\star$, $c^\star$ e $i^\star$. Portanto, países com elevadas taxas de poupança terão elevados níveis de capital em termos de eficiência e, consequentemente, também maiores níveis de produção e de consumo em termos de eficiência. As condições médias de vida dependem em grande medida do nível do consumo per capita (C/L), e este é determinado pelo nível do consumo em termos de eficiência, já que da definição de c podemos escrever $C/L = c \cdot A$, e A é comum a todas as economias do mundo (por ser um bem livremente disponível). Então, quanto maior for c, maior tenderá a ser o nível do consumo per capita, e maiores tenderão a ser as condições médias de vida da população.

Assim, o modelo de Solow permite explicar também algumas características importantes de muitos países em desenvolvimento no que diz respeito aos níveis médios de vida: estes países apresentam mais baixos níveis de capital por trabalhador eficiente que os países economicamente mais desenvolvidos, e também mais baixos níveis de produção e de consumo por trabalhador eficiente. Baixos níveis de consumo por trabalhador eficiente implicam também níveis médios de vida muito mais baixos do que nos países desenvolvidos. Isto leva–nos para a segunda conclusão relativamente à transição dinâmica no modelo de Solow:

Conclusão 4.2 *Países com taxas de poupança elevadas não crescerão mais rapidamente que países com taxas de poupança mais baixas, mas terão níveis de capital e de rendimento per capita mais elevados. Terão, portanto, melhores condições de vida em termos médios.*

Robustez da estabilidade do equilíbrio de longo prazo

[9] Vide capítulo anterior.

O estudo do impacto de uma variação na taxa de poupança é também útil de forma a tornar mais clara a questão relacionada com o tipo de *estabilidade* do equilíbrio de longo prazo neste modelo. Por detrás desta esconde–se a preocupação de saber qual o efeito de um choque sobre o equilíbrio de longo prazo, mesmo que este choque passe a produzir efeitos permanentes, como é o caso de uma subida da taxa de poupança.

Conforme vimos, após o choque a economia tem capacidade de regressar a uma nova trajectória de equilíbrio de longo prazo, verificando–se portanto a ausência de desequilíbrios de longo prazo neste caso, os quais são passíveis de existir em outros modelos quando um dos seus parâmetros sofre uma alteração de natureza permanente.

O facto de um modelo ter um equilíbrio estável perante variações em alguns dos seus parâmetros é normalmente designado por *"robustez do modelo"*. Conforme teremos oportunidade de ver nas secções seguintes, esta robustez continua a verificar–se mesmo perante alterações na taxa de crescimento da população e na taxa de crescimento do conhecimento tecnológico.

4.2 Variação no Crescimento da População

O que acontece ao equilíbrio de longo prazo se a taxa de crescimento da população aumentar de forma permanente de n_0 para n_1, $(n_1 > n_0)$? Como vamos mostrar, um aumento desta natureza provoca dois tipos de efeitos dinâmicos, e não apenas um como acontecia no caso de um aumento da taxa de poupança: provoca *um efeito temporário* (de transição ou de curto prazo) sobre a taxa de crescimento económico, e provoca também *um efeito permanente* (ou de longo prazo) sobre a referida taxa.

4.2.1 Análise gráfica

Vamos explicar estes efeitos usando primeiro a *Figura 4.5*. Suponha que a economia se encontra inicialmente no equilíbrio de longo prazo dado pelo ponto A na referida figura. O nível do stock de capital por trabalhador eficiente é dado por k_0^*, e a taxa de crescimento será igual a $g_{K(0)} = n_0 + m$, como vimos no capítulo anterior. Se a taxa de crescimento da população aumentar de n_0 para n_1 a função $(\delta + n + m)k$ deslocar–se–á de $(\delta + n_0 + m)k$ para $(\delta + n_1 + m)k$ e, portanto, o novo de equilíbrio de longo prazo será atingido no ponto C. Como em A a economia crescia a uma taxa dada por $g_{K(0)} = n_0 + m$, enquanto que em C cresce a uma taxa $g_{K(1)} = n_1 + m$, e como $n_1 > n_0$, podemos facilmente constatar que no novo ponto de equilíbrio de longo prazo a taxa de crescimento da economia é mais elevada que na situação inicial. Portanto, um aumento

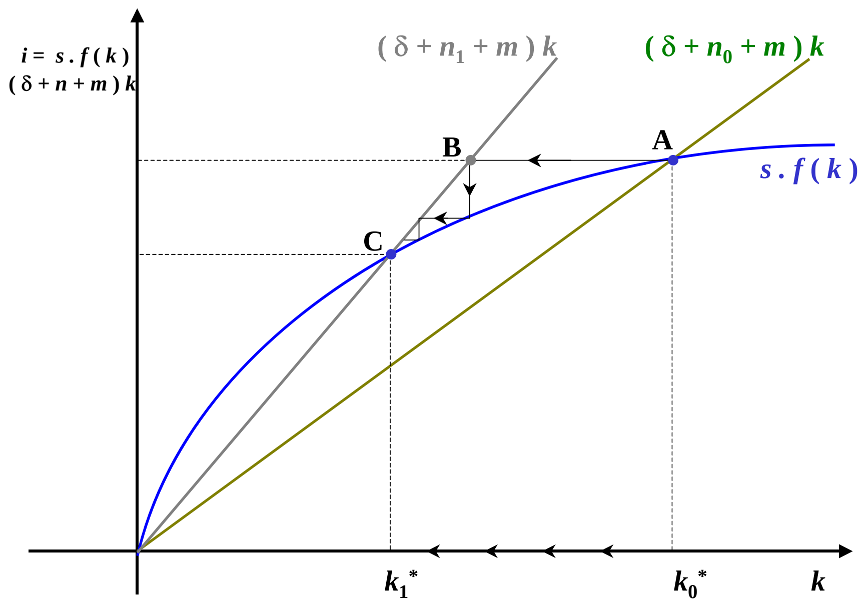


Figura 4.5: IMPACTO DE UM AUMENTO NA TAXA DE CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO.

na taxa de crescimento da população produz um *efeito permanente* (ou de longo prazo) sobre o crescimento económico na medida em que a economia passa a crescer permanentemente a uma taxa mais elevada.

No entanto, como é facilmente visível na *Figura 4.5*, um aumento de n_0 para n_1 produz também um efeito de curto prazo ou de transição entre os dois equilíbrios de longo prazo A e C. De forma a explicar o comportamento da taxa de crescimento (g_K) durante o processo de transição, vamos utilizar o mesmo tipo de raciocínio que aplicámos na secção anterior para analisar o impacto de uma variação da taxa de poupança.

4.2.2 Análise algébrica

★★ Seguindo os mesmos passos que utilizámos para estudar o impacto de um aumento da taxa de poupança: (i) assumindo uma função de produção tipo Cobb–Douglas para facilitar a exposição, a qual é escrita na forma intensiva por $q_t = f(k_t) = k_t^\alpha$, com $0 < \alpha < 1$; (ii) substituindo $f(k_t) = k_t^\alpha$ na equação fundamental do modelo; (iii) dividindo esta por k_t — e omitindo o índice t para simplificar — obteremos a expressão para

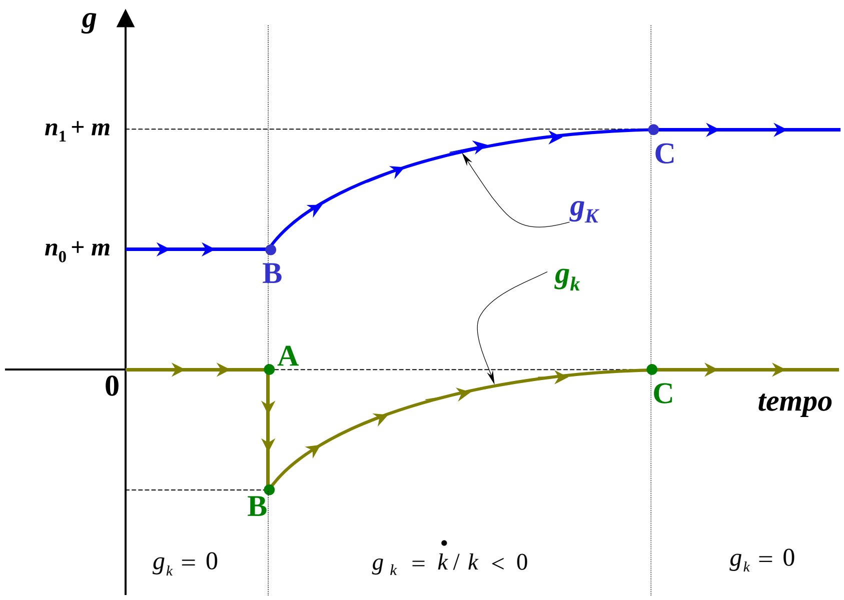


Figura 4.6: O IMPACTO DE UM AUMENTO NA TAXA DE CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO SOBRE AS TAXAS DE CRESCIMENTO. *Este aumento produz efeitos diferentes sobre as taxas de crescimento do stock de capital em valor absoluto* (g_K), *e do stock de capital em termos intensivos ou em termos de eficiência* (g_k).

a taxa de crescimento de k:

$$g_k = \frac{\dot{k}}{k} = s \cdot k^{\alpha-1} - (\delta + n + m)$$

A equação acima diz–nos que g_k varia se os parâmetros (s, δ, n, m) variarem ou se k variar. Como estamos a analisar o impacto de uma variação na taxa de crescimento da população (n), o cálculo do diferencial da expressão relativamente aos dois elementos da mesma que podem variar (n, k) dará o seguinte resultado $dg_k = -dn + \left[s \cdot (\alpha - 1)k^{\alpha-2}\right] dk$. [10] Esta expressão pode ser apresentada de uma forma mais sugestiva

$$dg_k = -dn - \left[s \cdot \frac{(1-\alpha)}{k^{2-\alpha}}\right] dk \tag{4.3}$$

O primeiro termo do lado direito da equação (4.3), ou seja $-dn$, dá–nos o impacto sobre dg_k resultante da variação na taxa de crescimento da população (n), mantendo–se k constante. Portanto, este termo mede a súbita diminuição de g_k entre os pontos A e B da *Figura 4.6,* em virtude de $dn > 0$ e de dn afectar negativamente dg_k devido ao sinal negativo na expressão acima.

Por outro lado, o segundo termo do lado direito dá–nos a variação de g_k quando n permanece constante e k varia ao longo do tempo. Este impacto corresponde ao movimento entre os pontos B e C da referida figura. Entre estes dois pontos, k vai aumentando ao longo do tempo, o que leva a que o segundo termo da expressão, $-s(1-\alpha)/k^{2-\alpha} \cdot dk$, vá assumindo um valor negativo mas cada vez menor em termos absolutos, período após período, tendendo gradualmente para zero com a aproximação ao ponto C. Quando este for alcançado, teremos $dg_k = 0$, e, consequentemente, um valor de g_k novamente constante e igual a zero.

Ou seja, em termos de conclusão: (i) na situação inicial (ponto A) teremos $g_k = 0$; (ii) quando n aumenta de n_0 para n_1 teremos $g_k < 0$, o que corresponde ao movimento entre A e B; (iii) depois n manter–se–á em n_1, mas k passará a aumentar com o tempo o que faz com que g_k continue negativo $(g_k < 0)$ mas gradualmente mais próximo de zero, correspondendo ao movimento de B para C; (iv) no equilíbrio final (ponto C), n e k permanecem constantes, o que implica que $g_k = 0$ novamente.

O raciocínio que acabámos de fazer dizia respeito às variações em g_k. No entanto, o que acontece às variações na taxa de crescimento do stock de capital em valores absolutos, ou seja, em g_K? A partir da definição $k \equiv K/AL$, o que implica $K \equiv kAL$, podemos escrever $g_K = g_k + n + m$. Aplicando o conceito de diferencial sobre esta expressão obtemos $dg_K = dg_k + dn + dm$, e como m permanece constante $(dm = 0)$, teremos

[10] Vide nota anterior sobre o conceito de diferencial de uma função $f(x, y)$.

$dg_K = dg_k + dn$. Substituindo nesta última expressão a equação (4.3), o termo dn anula–se e o resultado virá

$$dg_K = \left[s \cdot \frac{(1-\alpha)}{k^{2-\alpha}} \right] dk$$

Esta equação mostra que o aumento brusco que acorre em k quando n aumenta de n_0 para n_1, não se verifica no caso de K porque o termo dn se anula. Portanto, a taxa de crescimento do stock de capital em valores absolutos sofre apenas um tipo de impacto em todo este processo. Este impacto corresponde ao movimento de B para C na *Figura 4.9,* e resulta do impacto positivo que é provocado pelo aumento gradual de g_k entre estes dois pontos. Ou seja $dg_K > 0$ entre os pontos B e C, mas uma vez chegados ao ponto C teremos $dk = 0$ e, portanto, a taxa de crescimento do stock de capital em valores absolutos será constante e igual a $g_K = m_1 + n$. ■ ■

4.2.3 Exemplo numérico

Vamos agora ilustrar os resultados que acabámos de apresentar com uma simulação numérica. Continuamos a assumir os mesmos valores para os parâmetros que utilizámos na secção anterior, os quais levavam ao equilíbrio de longo prazo caracterizado por

$$k^\star = 2.45 \quad , \quad g_k^\star = g_q^\star = 0 \quad , \quad g_K^\star = g_Q^\star = 0.04$$

o qual era alcançado ao fim de seis ou sete décadas. Ou seja, ao fim de 70 anos a economia já se encontraria no seu equilíbrio de longo prazo. Este equilíbrio, bem como a evolução das várias variáveis fundamentais do modelo ao longo do tempo, podem ser revistos na *Figura 4.3* já anteriormente apresentada.

Suponhamos agora que quando $t = 124$ verifica–se uma alteração nas opções dos agentes económicos: a taxa de crescimento da população, que era até então de $n = 0.01$, passa a partir desse ano a ser de $n = 0.02$. Note que este aumento é permanente a partir desse ano, ou seja

$$\begin{array}{lcl} & n = 0.01 & & n = 0.02 & \\ | & \text{———————————} & | & \text{———————————} & \succ \\ t = 0 & & t = 124 & & \end{array}$$

Os impactos desta subida na taxa de crescimento da população sobre o equilíbrio existente até então podem ser vistos na *Figura 4.7*. Primeiro, no painel superior esquerdo verificamos que o nível de equilíbrio do stock de capital em termos intensivos, que era de $k^\star = 2.45$ antes do choque se

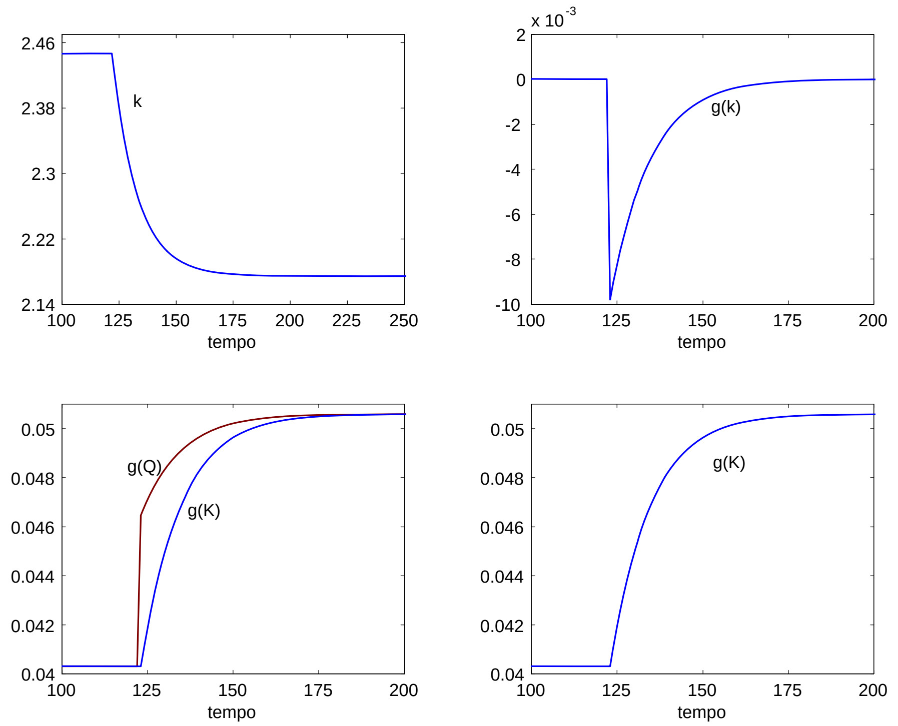


Figura 4.7: EFEITOS DE UM AUMENTO NA TAXA DE CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO SOBRE O EQUILÍBRIO DE LONGO PRAZO. *Quando* $t = 124$, *esta taxa aumenta de* 0.01 *para* 0.02, *mantendo–se depois permanente neste novo valor. Isto produz alterações significativas, quer em termos dos impactos de curto prazo, quer em termos de impactos de longo prazo.*

verificar, diminui ao longo do processo de transição dinâmica até alcançar o seu *novo valor de equilíbrio de longo prazo* que é de cerca de $k^{\star} = 2.17$.

Quanto às várias taxas de crescimento que são apresentadas nesta simulação, e que acabam por ser as taxas mais relevantes da economia — g_k , g_K , g_Q — a sua evolução dinâmica ao longo do processo de transição confirmam os resultados atrás obtidos.

No painel superior direito temos o comportamento da taxa de crescimento do capital em termos intensivos durante o processo de transição dinâmica. Quando a taxa de crescimento da população sofre o aumento súbito em $t = 124$, a taxa de crescimento de k_t sofre uma diminuição brusca, aumentando depois gradualmente ao longo do tempo devido à existência de rendimentos decrescentes na acumulação de capital. No fim do processo de transição, esta taxa de crescimento apresenta um valor igual ao que tinha antes do aumento da taxa de poupança, sendo novamente igual a zero.

Quanto à taxa de crescimento do capital em valores absolutos — painel inferior direito — esta não sofre qualquer variação brusca negativa, aumentando ao longo do tempo gradualmente para o seu novo valor de equilíbrio de longo prazo (5%), seguindo a trajectória de g_k após esta iniciar o seu processo de crescimento positivo. Na sub–secção anterior explicámos em detalhe as razões que fazem com que a trajectória de g_K não sofra a diminuição súbita que g_k sofre quando a taxa de crescimento da população aumenta bruscamente de 1% para 2% no período $t = 124$. Por esta razão não iremos repetir aqui os mesmos argumentos.

Quanto ao comportamento de g_Q — painel inferior esquerdo — deve notar que durante o processo de transição o seu valor é diferente do valor de g_K . Isto prende–se com o facto de, na função de produção que estamos a utilizar nestes capítulos (Cobb–Douglas), se verificar $g_Q = \alpha g_K + (1 - \alpha)(g_A + g_L)$. Aplicando diferenciais a esta expressão,[11] teremos $dg_Q = \alpha \cdot dg_K + (1-\alpha)dn$. Assim, o aumento brusco de g_Q no painel inferior esquerdo da *Figura 4.7* é explicado por $(1 - \alpha)dn$, isto é, $(1 - 0.4) \times 0.01 = 0.006$, enquanto que o aumento gradual desta taxa é explicado por $\alpha \cdot dg_K = 0.4 \times dg_K$. Quando dg_K atingir o valor zero no novo equilíbrio de longo prazo, então $dg_Q = dg_K = 0$, e ambas as taxas serão novamente iguais. No entanto, note que ambas aumentaram, passando de 4% (velho equilíbrio de longo prazo) para 5% no novo equilíbrio.

Em síntese, um aumento da taxa de crescimento da população levou a que um equilíbrio de longo prazo desse lugar a um processo de transição dinâmica, o qual, por sua vez, deu lugar ao fim de cerca de sete décadas a um novo equilíbrio de longo prazo que difere significativamente

[11] Lembre–se que $g_A = m$ e $g_L = n$. Por outro lado como m permanece constante, teremos $dg_A = 0$.

do equilíbrio inicial. Difere porque as taxas de crescimento do produto e do capital medidos em valores absolutos são mais elevadas em 1 ponto percentual do que eram antes do aumento da taxa de crescimento da população se ter verificado.

4.2.4 Principais resultados

A análise de um aumento permanente da taxa de crescimento da população permite também retirar do modelo um conjunto de conclusões bastante relevantes para o estudo do crescimento de longo prazo. Em termos de síntese, podemos dizer que os resultados são os seguintes:

Curto versus longo prazo

Uma alteração num dos parâmetros do modelo, neste caso um aumento permanente da taxa de crescimento da população, confirma uma vez mais a conclusão que apresentámos no ponto anterior relativa à sua estabilidade: no modelo de Solow o equilíbrio de longo prazo é estável, é único, e é robusto. No entanto, ao contrário do que se passava com alterações na taxa de poupança, que provocavam apenas efeitos de curto prazo, temos agora a seguinte conclusão:

Conclusão 4.3 *Um aumento permanente da taxa de crescimento da população tem efeitos no curto prazo (ou temporários) sobre o crescimento económico, durante o processo de transição entre dois equilíbrios de longo prazo. Mas tem também efeitos positivos permanentes sobre o crescimento económico de longo prazo.*

Crescimento da população e condições médias de vida

Existe ainda uma outra conclusão importante que se pode retirar dos efeitos do crescimento da população sobre a taxa de crescimento económico e sobre as condições de vida em economias com elevadas taxas de crescimento populacional. Como é facilmente constatável na *Figura 4.5*, economias com idênticas taxas de poupança e com idênticas taxas de crescimento do conhecimento tecnológico, *mas com diferentes taxas de crescimento da população*, terão diferentes níveis de capital por trabalhador eficiente no equilíbrio de longo prazo ($k^\star$).

Vamos utilizar um raciocínio semelhante ao da secção anterior. Suponha, por exemplo, que as taxas de crescimento da população n_0 e n_1 dizem respeito a dois países diferentes: os países $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_1$. No equilíbrio de longo prazo relativo a cada país teremos um determinado nível de k associado a esse equilíbrio: k_0^* para o país $\mathcal{P}_0$ e k_1^* para o país $\mathcal{P}_1$. Portanto, os países onde se verifiquem taxas de crescimento da população muito elevadas terão níveis de capital por trabalhador eficiente mais baixos que os países onde a população cresce a taxas mais baixas. Mas existe ainda um outro aspecto mais negativo que resulta de elevadas taxas de crescimento populacional.

Aplicando o mesmo raciocínio da secção anterior, tendo em consideração que o nível da produção (por trabalhador eficiente) é uma função positiva do nível do capital (também por trabalhador eficiente),

$$q^* = f(k^*)$$

e que a produção é repartida entre consumo e investimento

$$q^* = c^* + i^*$$

então, quanto menor for $k^\star$, menores tenderão a ser os níveis de $q^\star$, $c^\star$ e $i^\star$. Portanto, países com elevadas taxas de crescimento da população terão baixos níveis de capital em termos de eficiência e, consequentemente, também baixos níveis de produção e de consumo em termos de eficiência. As condições médias de vida dependem em grande medida do nível do consumo per capita (C/L), e este é determinado pelo nível do consumo em termos de eficiência, já que da definição de c podemos escrever $C/L = c{\cdot}A$, e A é comum a todas as economias do mundo (por ser um bem livremente disponível). Então quanto menor for c menor tenderá a ser o nível do consumo per capita, e piores tenderão a ser as condições médias de vida da população.

Portanto, o modelo de Solow permite explicar porque razão países em desenvolvimento com elevadas taxas de crescimento da população apresentam mais baixos níveis médios de vida do que os países desenvolvidos, apesar de apresentarem taxas de crescimento económico mais elevadas. Em síntese: isto resulta de elevadas taxas de crescimento populacional levarem, por um lado, a baixos níveis de k^* — o que implica baixos níveis de q^*, i^*, e c^* — e por outro, levarem a mais elevados valores para g_Q porque $g_Q = n + m$.

Isto leva–nos para a quarta conclusão relativamente à transição dinâmica no modelo de Solow:

Conclusão 4.4 *Maiores taxas de crescimento da população implicam taxas de crescimento económico mais elevadas, mas implicam também menores níveis de investimento e de consumo per capita, isto é, piores condições de vida em termos médios.*

4.3 Variação no Crescimento do Conhecimento Tecnológico

O que acontece ao equilíbrio de longo prazo se a taxa de crescimento do conhecimento tecnológico aumentar de forma permanente de m_0 para m_1, $(m_1 > m_0)$? Como vamos ver, este tipo de aumento provoca efeitos muito semelhantes aos provocados pelo aumento na taxa de crescimento da população que analisámos na secção anterior. No entanto, nem todas as conclusões poderão ser directamente aplicadas conforme iremos mostrar. Note também que, e contrariamente ao que vimos no caso de um acréscimo da taxa de poupança, este aumento apresenta dois efeitos dinâmicos: um efeito temporário (ou de transição) sobre a taxa de crescimento económico, e um efeito permanente (ou de longo prazo) sobre a mesma taxa.

4.3.1 Análise gráfica

Note que a análise gráfica é totalmente igual à análise que foi apresentada na secção anterior. A única alteração reside no seguinte facto: em vez da expressão $(\delta + n + m)k$ se deslocar devido a um aumento em n, esta desloca–se agora devido a m aumentar. Portanto, a nossa explicação vai ser mais breve nesta secção.

Vamos explicar os impactos desta alteração em m usando primeiro a *Figura 4.8.* Suponha que a economia se encontra inicialmente no equilíbrio de longo prazo representado pelo ponto A na referida figura. O nível do stock de capital por trabalhador eficiente é dado por k_0^*, e a taxa de crescimento será igual a $g_{K(0)} = n + m_0$. Se a taxa de crescimento da população aumentar de m_0 para m_1 a função $(\delta+n+m)k$ deslocar–se–á de $(\delta + n + m_0)k$ para $(\delta + n + m_1)k$ e, portanto, o novo equilíbrio de longo prazo será atingido no ponto C. Em A a economia crescia a uma taxa dada por $g_{K(0)} = n+m_0$, e em C cresce a uma taxa $g_{K(1)} = n+m_1$, sendo $m_1 > m_0$ podemos facilmente constatar que no novo ponto de equilíbrio de longo prazo a taxa de crescimento da economia é mais elevada que na situação inicial. Portanto, um aumento na taxa de crescimento da população produz um *efeito permanente* (ou de longo prazo) sobre o crescimento económico porque a economia passa a crescer a uma taxa permanentemente mais elevada.

No entanto, como é facilmente visível na *Figura 4.8*, um aumento de m_0 para m_1 produz também um efeito de curto prazo ou de transição entre os dois equilíbrios de longo prazo A e C. De forma a explicar o comportamento da taxa de crescimento (g_K) durante o processo de transição, vamos utilizar o mesmo tipo de raciocínio que aplicámos na secção

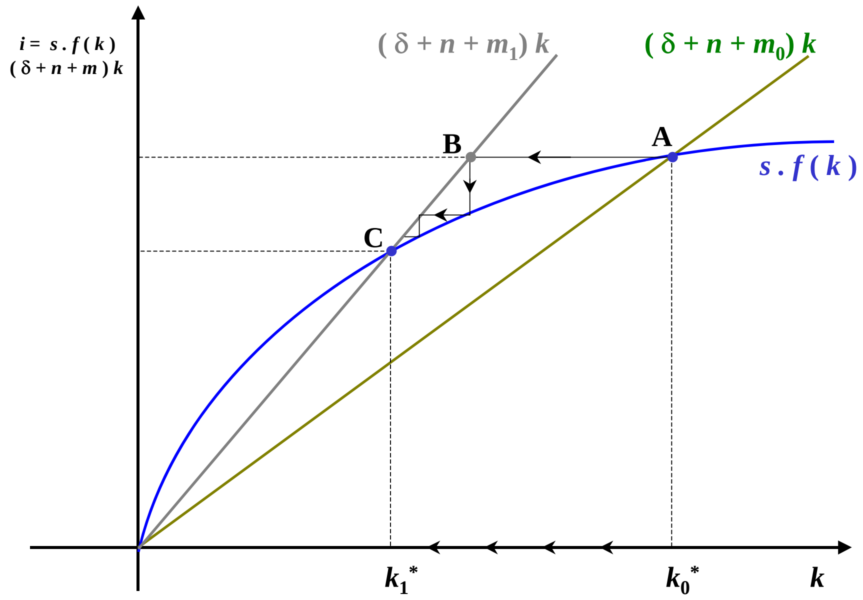


Figura 4.8: IMPACTO DE UM AUMENTO NA TAXA DE CRESCIMENTO DO CONHECIMENTO TECNOLÓGICO.

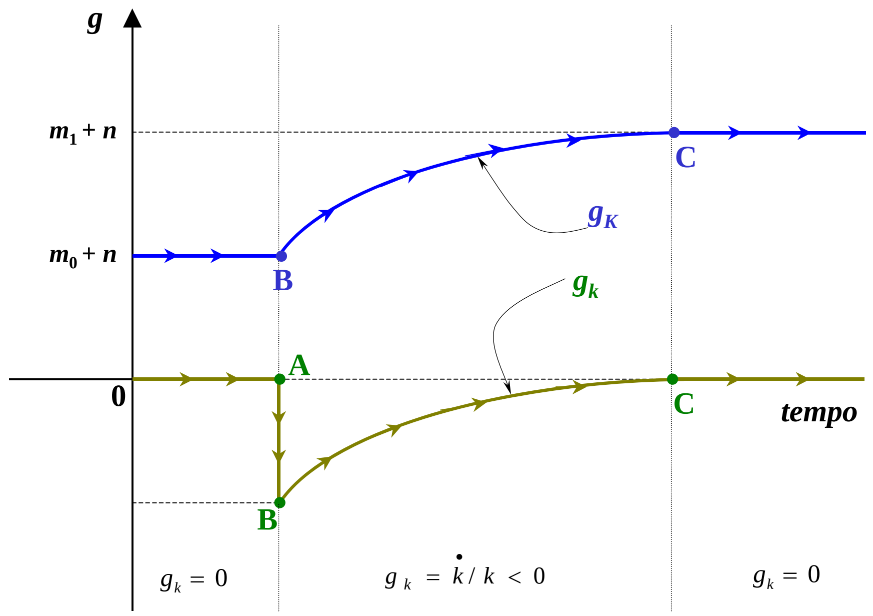


Figura 4.9: IMPACTO DE UM AUMENTO DA TAXA DE CONHECIMENTO TECNOLÓGICO (m) SOBRE AS TAXAS DE CRESCIMENTO.

anterior para analisar o impacto de uma variação da taxa de crescimento da população.

4.3.2 Análise algébrica

★★ Seguindo os mesmos passos da análise algébrica da secção anterior : (i) assumindo uma função de produção tipo Cobb–Douglas para facilitar a exposição, sendo esta escrita na forma intensiva por $q_t = f(k_t) = k_t^\alpha$, com $0 < \alpha < 1$; (ii) substituindo $f(k_t) = k_t^\alpha$ na equação fundamental do modelo; (iii) dividindo esta equação fundamental por k_t — e omitindo o índice t para simplificar — obteremos a expressão para a taxa de crescimento de k já bastante conhecida neste capítulo: $g_k = \frac{\dot{k}}{k} = s \cdot k^{\alpha-1} - (\delta + n + m)$.

A equação acima diz–nos que g_k varia se os parâmetros (s, δ, n, m) variarem ou se k variar. Como estamos a analisar o impacto de uma variação na taxa de crescimento do conhecimento tecnológico (m), o cálculo do diferencial da expressão relativamente aos dois elementos da mesma que podem variar (m, k) dará o seguinte resultado $dg_k = -dm + \left[s \cdot (\alpha - 1)k^{\alpha-2}\right] dk$. [12] Esta expressão pode ser apresentada de uma forma mais sugestiva

$$dg_k = -dm - \left[s \cdot \frac{(1-\alpha)}{k^{2-\alpha}}\right] dk \tag{4.4}$$

O primeiro termo do lado direito da equação (4.4), ou seja $-dm$, dá–nos o impacto sobre dg_k da variação na taxa de crescimento do conhecimento tecnológico (dm), mantendo–se k constante. Portanto, este termo mede a súbita diminuição de g_k entre os pontos A e B da *Figura 4.9,* em resultado de $dm > 0$ e de dm afectar negativamente dg_k (vide sinal negativo de dm).

Por outro lado, o segundo termo do lado direito dá–nos a variação de g_k quando m permanece constante e k varia ao longo do tempo. Este impacto corresponde ao movimento entre os pontos B e C da referida figura. Entre estes dois pontos k vai aumentando ao longo do tempo, o que leva a que a expressão $-s(1-\alpha)/k^{2-\alpha} \cdot dk$, apesar de ser negativa, vá aumentando período após período, tendendo gradualmente para zero com a aproximação ao ponto C. Quando este for alcançado, teremos $dg_k = 0$, e, consequentemente, um valor de g_k novamente constante e igual a zero.

Em termos de síntese: (i) na situação inicial (ponto A) teremos $g_k = 0$; (ii) quando m aumenta de m_0 para m_1 teremos $g_k < 0$, o que corresponde ao movimento entre A e B; (iii) depois m manter–se–á constante em m_1; enquanto que k passará a aumentar com o tempo o que faz com que

[12] Mais uma vez, lembre–se que o conceito de diferencial de uma função $f(x, y)$ é dado pela expressão: $df = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$. Onde f'_i é a derivada parcial de f em ordem a cada um dos seus argumentos: $i = x, y$.

g_k , apesar de negativa, aumente e aproxime–se gradualmente de zero, correspondendo ao movimento de B para C; (iv) no equilíbrio final (ponto C), m e k permanecem novamente constantes, o que implica de novo que $g_k = 0$.

O que acontece às variações na taxa de crescimento do stock de capital em valores absolutos, ou seja, em g_K? O raciocínio é totalmente semelhante ao que efectuámos na secção anterior quando analisámos os impactos de um aumento em n. A partir da definição $K \equiv kAL$, podemos escrever $g_K = g_k + n + m$. Aplicando o conceito de diferencial sobre esta expressão obtemos $dg_K = dg_k + dn + dm$. Como n permanece constante ($dn = 0$), teremos $dg_K = dg_k + dm$. Substituindo nesta última expressão a equação (4.4), o termo dm anula–se e virá

$$dg_K = \left[s \cdot \frac{(1-\alpha)}{k^{2-\alpha}} \right] dk$$

Note que a variação brusca que ocorre em k quando m aumenta de m_0 para m_1, não se verifica no caso de K porque o termo dm se anula. Portanto, a taxa de crescimento do stock de capital em valores absolutos sofre apenas um impacto em todo este processo. Este impacto corresponde ao movimento de B para C na *Figura 4.9*, e resulta do impacto positivo do aumento gradual de g_k entre estes dois pontos. Ou seja $dg_K > 0$ entre os pontos B e C, mas chegados ao ponto C, temos $dk = 0$ e, portanto, a taxa de crescimento do stock de capital em valores absolutos será constante e dada por $g_K = n + m_1$. ■■

4.3.3 Exemplo numérico

Vamos agora ilustrar os resultados que acabámos de apresentar com uma simulação numérica. Continuamos a assumir os mesmos valores para os parâmetros que utilizámos na secção anterior, os quais levavam ao equilíbrio de longo prazo caracterizado por $k^\star = 2.45$, $g_k^\star = g_q^\star = 0$, $g_K^\star = g_Q^\star = 0.04$.

Suponhamos agora que quando $t = 124$, por razões externas a taxa de crescimento do conhecimento tecnológico, que era até então de $m = 0.03$, passa a partir desse ano a ser de $m = 0.04$. Note que este aumento é permanente a partir desse ano, ou seja

$$\begin{array}{lll} & m = 0.03 & & m = 0.04 & \\ | & \text{———————} & | & \text{———————} & \succ \\ t = 0 & & t = 124 & & \end{array}$$

Os impactos desta subida na taxa de crescimento do conhecimento tecnológico sobre o equilíbrio inicial são exactamente iguais aos impactos

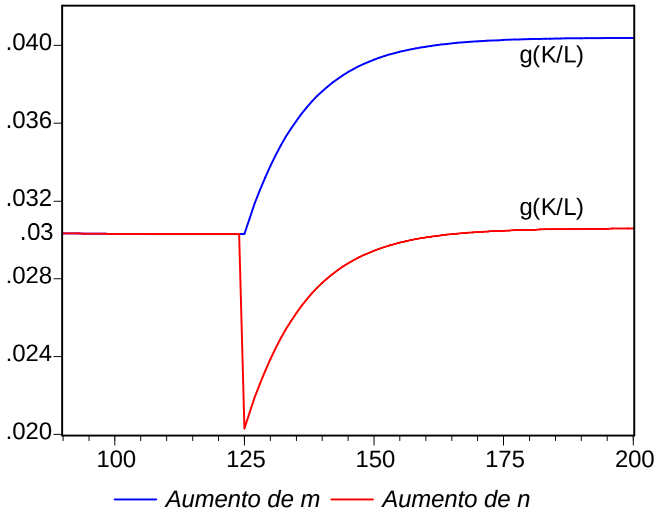


Figura 4.10: O IMPACTO SOBRE A TAXA DE CRESCIMENTO DO CAPITAL PER CAPITA $(g_{K/L})$. *Um aumento de 1 ponto percentual na taxa de crescimento da população (n) e na taxa de crescimento do conhecimento tecnológico (m) produz impactos diferentes sobre a taxa de crescimento do capital per capita.*

que resultam do aumento da taxa de crescimento da população. E isto verifica–se porque em ambos os casos os aumentos das taxas de crescimento são exactamente iguais: $\Delta n = 0.01$ e $\Delta m = 0.01$. Portanto, os impactos que resultam de $\Delta m = 0.01$ podem ser revistos na *Figura 4.7* apresentada na secção anterior, a qual é comum a estas duas variações de 1%.

No entanto, no que diz respeito à evolução da taxa de crescimento *do produto per capita* $(g_{K/L})$, existe uma diferença extremamente grande entre os aumentos de n e de m, mesmo que ambas estas taxas aumentem no mesmo montante. A diferença reside no facto de um aumento de m levar a um aumento da taxa $g_{K/L}$, quer durante o processo de transição dinâmica, quer no novo equilíbrio de longo prazo. No entanto, um aumento de n não produz quaisquer efeitos sobre a taxa $g_{K/L}$ no novo equilíbrio de longo prazo, causando, por outro lado, uma redução da mesma durante o processo de transição dinâmica. Este resultado pode ser visto na *Figura 4.10*.

A explicação destes dois tipos de comportamentos para a taxa de crescimento do produto per capita é fácil no que diz respeito aos equilíbrios de longo prazo. Comecemos primeiro pelos valores de $g_{K/L}$ no equilíbrio inicial e no novo equilíbrio. Aqui basta lembrar que no equilíbrio de longo prazo teremos sempre: $g_{K/L} = m$.[13] No equilíbrio inicial, antes dos aumentos em m e/ou n, $g_{K/L}$ tinha uma e uma só trajectória, sendo o seu valor de equilíbrio de 3% ao ano, ou seja $g_{K/L} = m_0 = 0.03$ até $t = 124$. Após o aumento de m em $t = 124$, de 3% para 4%, e mantendo–se n constante e igual a 1%, no novo equilíbrio o resultado é imediato: $g_{K/L} = m_1 = 0.04$.

Por outro lado, n não afecta o valor de equilíbrio de longo prazo da taxa $g_{K/L}$, porque $g_{K/L} = m$. Então variações em n em nada afectam o valor de longo prazo desta taxa. Ou seja, o aumento de n de $n_0 = 0.01$ para $n_1 = 0.02$ em $t = 124$ — e mantendo–se m inalterado em $m = 0.03$ — não altera minimamente o valor de equilíbrio $g_{K/L} = m_0 = 0.03$. Estes pontos podem ser confirmados na *Figura 4.10*.

Quanto ao comportamento de $g_{K/L}$ durante o processo de transição dinâmica, que decorre entre o momento de cada uma das alterações e o novo equilíbrio de longo prazo, a explicação do mesmo é um pouco mais exigente. No entanto, a questão fundamental é perceber que como $k = K/AL$, então $K/L = kA$. Ou seja o capital per capita (K/L) é igual ao capital em termos intensivos (k) multiplicado pelo nível do conhecimento tecnológico (A). Aplicando taxas de crescimento à expressão $K/L = kA$ teremos o seguinte resultado $g_{K/L} = g_k + g_A$. Como dos dados do exercício sabemos que $g_A = m$, a aplicação do diferencial à última equação fornece o seguinte resultado

$$dg_{K/L} = dg_k + dm$$

Agora basta substituir nesta equação a expressão de dg_k que resulta de variações em n e em m — sendo esta dada, respectivamente, por equações (4.3) e (4.4) — e acrescentar–lhe o termo dm, para obter a variação da taxa de crescimento do capital per capita $(dg_{K/L})$ durante o processo de transição entre os dois equilíbrios. Procedendo a estas operações, podemos confirmar que no caso de m passar para 4%, $g_{K/L}$ irá aumentar gradualmente até ao seu novo valor de equilíbrio de longo prazo (4%), enquanto que se n aumentar para 2%, $g_{K/L}$ sofre primeiro uma variação brusca negativa, aumentando depois gradualmente até voltar a atingir o valor inicial de 3%.

4.3.4 Principais resultados

A análise de um aumento permanente da taxa de crescimento do conhecimento tecnológico permite retirar do modelo um conjunto de conclusões importantes.

[13] Vide capítulo anterior caso se tenha esquecido o porquê deste resultado.

Curto versus longo prazo

Primeiro, confirma uma vez mais duas conclusões que apresentámos no ponto anterior: (1) no modelo de Solow o equilíbrio de longo prazo é estável, é único, e é robusto; (2) neste modelo, um aumento da taxa m produz dois efeitos dinâmicos e não apenas um. Isto leva–nos a mais uma conclusão:

Conclusão 4.5 *Um aumento permanente da taxa de crescimento do conhecimento tecnológico tem efeitos no curto prazo (ou temporários) sobre o crescimento económico, durante o processo de transição entre dois equilíbrios de longo prazo. Mas tem também efeitos positivos permanentes sobre o crescimento económico de longo prazo.*

Crescimento do conhecimento tecnológico e condições médias de vida

Como é facilmente constatável na *Figura 4.8*, economias com idênticas taxas de poupança, idênticas taxas de crescimento da população, *mas com diferentes taxas de crescimento do conhecimento tecnológico*, terão diferentes níveis de capital por trabalhador eficiente no equilíbrio de longo prazo ($k^\star$).

Por exemplo, suponha que as taxas de crescimento do conhecimento tecnológico m_0 e m_1 dizem respeito a dois países diferentes: os países $\mathcal{P}_0$ e $\mathcal{P}_1$. No equilíbrio de longo prazo relativo a cada um dos países teremos um determinado nível de k associado a esse equilíbrio: $k_0^\star$ para o país $\mathcal{P}_0$ e $k_1^\star$ para o país $\mathcal{P}_1$. Como $k_1^\star$ é menor que $k_0^\star$, o nível do stock de capital por trabalhador eficiente será maior no país $\mathcal{P}_0$ que no país $\mathcal{P}_1$. Portanto, poderíamos aparentemente concluir que os países onde existam taxas de crescimento do conhecimento tecnológico muito elevadas terão níveis de *capital per capita mais baixos* do que nos países onde estas taxas de crescimento sejam mais baixas. Isto porque, mais baixos níveis de capital por trabalhador eficiente implicam mais baixos níveis de produção e de consumo também por trabalhador eficiente, já que $q^\star = f(k^\star)$ e $q^\star = c^\star + i^\star$. Níveis de produção e de consumo por trabalhador eficiente mais baixos deveriam implicar mais baixos níveis médios de vida.

No entanto isto não está correcto porque, apesar de ser um raciocínio válido para o nível do stock de capital por trabalhador eficiente, não é válido para o capital medido em valores per capita. O nível do capital per capita (K/L) é dado pela seguinte equação: $K/L = k \cdot A$. Assim, mesmo que o país $\mathcal{P}_1$ tenha níveis de k mais baixos do que $\mathcal{P}_0$, tem no entanto A a crescer a uma taxa mais elevada do que a que vigora no país $\mathcal{P}_0$, já que $m_0 < m_1$. De facto, na *Figura 4.10* apresentámos uma simulação que confirma este ponto, demonstrando que o aumento da taxa de crescimento do conhecimento tecnológico leva a um aumento da taxa de crescimento do stock de capital per capita, o que, consequentemente, levará também a um aumento do nível do rendimento per capita.

Note que apesar dos efeitos que decorrem de um aumento de n e de m serem semelhantes no que diz respeito à evolução de k, eles são diferentes no que toca à evolução de K/L. Primeiro, um aumento em n produz de facto uma redução no nível do capital em termos intensivos de equilíbrio de longo prazo ($k^\star$), e, consequentemente, produz também uma redução em $q^\star$ e $c^\star$. No entanto, este aumento não produz qualquer efeito positivo (ou negativo) sobre a taxa de crescimento do capital, do produto e do consumo (todos medidos em valores per capita). Por outro lado, um aumento em m produz a mesma redução no nível do capital por trabalhador eficiente de equilíbrio de longo prazo ($k^\star$) (e, consequentemente, também em $q^\star$ e $c^\star$), mas produz ainda um efeito positivo e permanente sobre a taxa de crescimento do capital, do produto e do consumo também todos medidos em valores per capita.

Ou seja, enquanto que ambos os aumentos (de n e m) reduzem o nível do consumo por trabalhador eficiente ou em termos intensivos ($c^\star$), apenas o aumento de m permite manter e aumentar a taxa de crescimento do capital per capita e, consequentemente, também aumentar a taxa de crescimento do consumo per capita ($g_{C/L} > 0$). Este ponto foi demonstrado na sub–secção anterior, quando mostrámos que um aumento de m levava a um aumento de $g_{C/L}$, enquanto que um aumento de n não provocava este efeito. Reveja a *Figura 4.10* para mais detalhes.

Em termos de síntese poderemos concluir que:

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
n\uparrow \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} k^\star \downarrow & \text{e} & c^\star \downarrow \\ \Delta g_{K/L} = 0 & \text{e} & K/L \text{ inalterado} \\ \Delta g_{C/L} = 0 & \text{e} & C/L \text{ inalterado} \end{array} \right. \\[2em]
m\uparrow \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} k^\star \downarrow & \text{e} & c^\star \downarrow \\ \Delta g_{K/L} > 0 & \text{e} & K/L \uparrow \\ \Delta g_{C/L} > 0 & \text{e} & C/L \uparrow \end{array} \right.
\end{array}
}
$$

Portanto, um aumento de m produz uma diminuição de c, $c \equiv C/AL$, mas produz um aumento permanente do consumo per capita, C/L. Assim, o modelo de Solow permite explicar também uma característica importante de muitos países subdesenvolvidos. Como muitos destes países têm taxas de crescimento do conhecimento tecnológico muito baixas, relativamente aos países mais desenvolvidos, isto implica que os países subdesenvolvidos apresentem menores níveis de produção, de capital, e de consumo per capita e, consequentemente, também níveis médios de vida mais baixos do que nos países mais desenvolvidos economicamente. Isto leva–nos para a sexta conclusão relativamente à transição dinâmica no modelo de Solow:

Conclusão 4.6 *Maiores taxas de crescimento do conhecimento tecnológico implicam taxas de crescimento económico mais elevadas, mas implicam também maiores níveis de investimento e de consumo per capita, isto é, melhores condições de vida em termos médios.*

4.4 Regra Dourada e Transição

★★ Caso a economia se encontre numa situação que não corresponde ao equilíbrio de longo prazo da regra de ouro, e admitindo que se conhece a taxa de poupança que conduziria a economia para o seu ponto de consumo máximo e ainda que esta é passível de ser aplicada, queremos saber qual o comportamento da economia durante o trajecto da situação de partida para a situação final.

O processo de transição dinâmica de um equilíbrio de longo prazo inicial para o equilíbrio em que se verifique a regra dourada na acumulação de capital é apresentado na *Figura 4.11.* Nesta figura são apresentados os dois casos possíveis: taxa de poupança do equilíbrio inicial superior e inferior à taxa de poupança da regra dourada.

Se a taxa de poupança que existe na economia é superior àquela que corresponde à regra dourada da acumulação de capital ($s^* > s^{**}$), então o stock de capital por unidade de trabalho eficiente é também ele superior ao que corresponderia à regra dourada ($k^* > k^{**}$). O governo deverá interferir na economia de forma a que se verifique uma diminuição da taxa de poupança no sentido do consumo aumentar no longo prazo. Como a quebra na taxa de poupança gera a curto prazo um aumento no nível de consumo privado, esta política será facilmente aceite pela colectividade.

Se a taxa de poupança que existe na economia é inferior àquela que corresponde à regra dourada da acumulação de capital ($s^* < s^{**}$), então o stock de capital por unidade de trabalho eficiente será também inferior ao que corresponderia à regra dourada ($k^* < k^{**}$). Neste caso, o governo deveria intervir de molde a aumentar a curto prazo a taxa de poupança para gerar um acréscimo no consumo a longo prazo. Esta medida provoca uma quebra imediata no nível de consumo e pode assim revelar-se impopular sendo rejeitada pela colectividade.

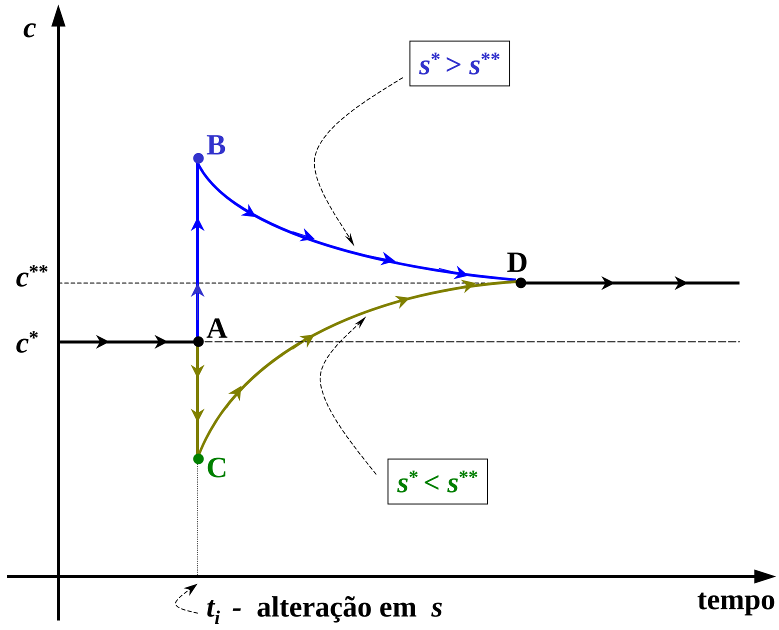


Figura 4.11: *Transição para a regra dourada da acumulação de capital*

A forma mais fácil e clara para explicar as trajectórias de transição para a regra dourada, conforme *Figura 4.11*, é aplicar o conceito de diferencial sobre a expressão da função consumo $c = f(k) - i$. Como $i = s \cdot f(k)$, e utilizando uma função de produção tipo Cobb–Douglas $q = f(k) = k^{\alpha}$, então

$$c = k^{\alpha} - s \cdot k^{\alpha}. \tag{4.5}$$

O diferencial da função (4.5) é dado pela expressão $dc = \left(\alpha k^{\alpha-1}\right) dk - (k^{\alpha})\, ds - s(\alpha k^{\alpha-1}) dk$, a qual pode ser reescrita como

$$dc = -\left(k^{\alpha}\right) ds + \left[\alpha \left(1 - s\right) / k^{1-\alpha}\right] dk \tag{4.6}$$

O primeiro termo do lado direito da expressão (4.6) — ou seja, $-\left(k^{\alpha}\right) ds$ — dá–nos a variação de c quando s sofre a variação mas k permanece constante. O segundo termo apresenta–nos a variação de c quando k varia e s permanece constante. Suponha que a taxa de poupança que vigora na economia (e num equilíbrio de longo prazo) é superior à taxa de poupança correspondente à regra dourada. Neste caso, a taxa de poupança terá de descer de forma a que a economia atinja a referida regra. Esta variação provoca uma variação em c que é dada pela diferença entre os pontos A e B na *Figura 4.11*. Como a variação de s é negativa

$(ds < 0)$, então $-(k^{\alpha})\, ds > 0$. Por outro lado, após se ter verificado uma descida em s, o nível de k irá descer também ao longo de vários períodos de tempo; portanto $dk < 0$. Enquanto k for diminuindo ao longo do tempo, o termo $\left[\alpha (1-s)/k^{1-\alpha}\right] dk$ é negativo, porque $dk < 0$, mas vai–se tornando cada vez menos negativo, tendendo para zero à medida que se aproxima de D. Neste ponto, k atinge o nível associado à regra dourada, (k^{**}), passa a permanecer constante, e, assim, este efeito negativo sobre o consumo cessa. Este efeito da variação de k desde o equilíbrio inicial até ao equilíbrio da regra dourada corresponde à trajectória entre os pontos B e D da *Figura 4.11.*

A trajectória oposta, a que resulta de um aumento da taxa de poupança de forma a se atingir a regra dourada, é descrita pelo movimento de A para C, e depois de C para D. A explicação desta trajectória pode ser feita utilizando a mesma expressão do diferencial de c acima. Note que, neste caso, as variações são opostas, mas as forças que as causam são exactamente as mesmas: variações em s e em k.■■

4.5 A Estabilidade de Longo Prazo

No capítulo anterior sobre o modelo de Solow, analisámos o equilíbrio de longo prazo e concluímos que o mesmo era único e estável. Ao longo do presente capítulo discutimos alterações em vários parâmetros e os impactos das mesmas sobre o equilíbrio de longo prazo do modelo. Analisámos alterações nos seguintes parâmetros:

- taxa de poupança
- taxa de crescimento da população
- taxa de crescimento do conhecimento tecnológico

e, para além de conclusões relevantes sobre as condições médias de vida das populações que se obtinham em cada um dos casos (e nem sempre as conclusões eram semelhantes), em todas esta alterações o modelo permitia chegar à conclusão de que a economia partia de um equilíbrio inicial, percorria um processo de ajustamento dinâmico ao longo de um dado período de tempo de forma a que a referida alteração fosse incorporada, e depois atingia um novo equilíbrio no longo prazo.

Quando um modelo dinâmico sofre alterações em qualquer dos seus parâmetros e a natureza do equilíbrio não se altera (continuando a ser único e estável), dizemos que o modelo apresenta um equilíbrio de longo prazo que é *robusto* relativamente à sua estabilidade e unicidade. Esta característica conduz–nos a outra conclusão fundamental do modelo de Solow relativamente aos processos de transição dinâmica:

Conclusão 4.7 *O equilíbrio de longo prazo não é apenas estável e único, é também "robusto", já que mesmo alterações em parâmetros fundamentais do modelo não alteram o tipo de estabilidade e unicidade do equilíbrio de longo prazo do modelo.*

4.6 Sumário

1. Um aumento da taxa de poupança não tem efeitos positivos permanentes sobre o crescimento económico de longo prazo; apenas tem efeitos positivos no curto prazo (ou temporários) durante o processo de transição entre dois equilíbrios de longo prazo.

2. Países com taxas de poupança elevadas não crescerão mais rapidamente que países com taxas de poupança mais baixas, mas terão níveis de capital e de rendimento per capita mais elevados. Terão, portanto, melhores condições de vida em termos médios.

3. Um aumento permanente da taxa de crescimento da população tem efeitos no curto prazo (ou temporários) sobre o crescimento económico, durante o processo de transição entre dois equilíbrios de longo prazo. Mas tem também efeitos positivos permanentes sobre o crescimento económico de longo prazo.

4. Maiores taxas de crescimento da população implicam taxas de crescimento económico mais elevadas, mas implicam também menores níveis de investimento e de consumo por trabalhador eficiente, isto é, piores condições de vida em termos médios.

5. Um aumento permanente da taxa de crescimento do conhecimento tecnológico tem efeitos no curto prazo (ou temporários) sobre o crescimento económico, durante o processo de transição entre dois equilíbrios de longo prazo. Mas tem também efeitos positivos permanentes sobre o crescimento económico de longo prazo.

6. Maiores taxas de crescimento do conhecimento tecnológico implicam taxas de crescimento económico mais elevadas, mas implicam também maiores níveis de investimento e de consumo per capita, isto é, melhores condições de vida em termos médios.

7. O equilíbrio de longo prazo é estável, é único, e é robusto.